

Réduction des endomorphismes

Polynôme en un endomorphisme

Exercice 1 [00753] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ telle que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre.
Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u .

Exercice 2 [00754] [correction]

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 = I$.
Montrer que

$$\ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}) = E$$

Exercice 3 X MP [03033] [correction]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est nilpotente et qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$ et $B = AP(A)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 4 [03210] [correction]

Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = O_n$.
a) Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
b) On pose

$$H = \{I_n + P(B)/P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$$

Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$.

Sous-espaces vectoriels stables

Exercice 5 [00755] [correction]

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .
On suppose que u et v commutent, montrer que $\text{Im}u$ et $\ker u$ sont stables par v .
Que dire de la réciproque?

Exercice 6 [00756] [correction]

Montrer qu'un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E commute avec un projecteur p si, et seulement si, $\text{Im}p$ et $\ker p$ sont stables par f .

Exercice 7 [00757] [correction]

Déterminer les sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 8 [00758] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

On pose $N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \ker u^p$ et $I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im}u^p$.

- Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \ker u^n$ et $I = \text{Im}u^n$.
- Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u et tels que les restrictions de u à N et I soient respectivement nilpotente et bijective.
- Réciproquement on suppose $E = F \oplus G$ avec F et G sous-espaces vectoriels stables par u tels que les restrictions de u à F et G soient respectivement nilpotente et bijective. Établir $F = N$ et $G = I$.

Exercice 9 [00759] [correction]

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent.

On désire montrer que $\det(u + v) = \det u$ en raisonnant par récurrence sur la dimension $n \geq 1$.

- Traiter le cas $n = 1$ et le cas $v = 0$.
- Pour $n \geq 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et v dans une base adaptée à $\text{Im}v$.
- Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de u et v au départ de $\text{Im}v$.

Exercice 10 Centrale MP [00760] [correction]

Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On considère $\Gamma = \{u \in \mathcal{L}(E), \ker u = E_1 \text{ et } \text{Im}u = E_2\}$.

- Montrer, pour tout u de Γ que $\tilde{u} = u_{E_2}$ est un automorphisme de E_2 .
Soit $\phi : \Gamma \rightarrow \text{GL}(E_2)$ définie par $\phi(u) = \tilde{u}$.
- Montrer que \circ est une loi interne dans Γ .
- Montrer que ϕ est un morphisme injectif de (Γ, \circ) dans $(\text{GL}(E_2), \circ)$.
- Montrer que ϕ est surjectif.
- En déduire que (Γ, \circ) est un groupe. Quel est son élément neutre?

Exercice 11 [00761] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base \mathcal{B} , $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan.

- a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^*/u(H) = \{0\}\}$?
- b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si, et seulement si, $u \circ f$ est colinéaire à u .
- c) Soient A et L les matrices dans \mathcal{B} de f et u .
Montrer que H est stable par f si, et seulement si, tL est vecteur propre de tA
- d) Déterminer les plans stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Centrale MP [02492] [correction]

Soient f et g deux endomorphismes l'espace euclidien de \mathbb{R}^3 canoniquement représentés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- a) Trouver les droites vectorielles stables par f .
- b) Soit P un plan de \mathbb{R}^3 de vecteur normal \vec{n} . Montrer que P est stable par f si, et seulement si, $\text{Vect}(\vec{n})$ est stable par f^* .
En déduire les plans stables par f .
- c) Donner les droites et les plans stables par g .

Exercice 13 Mines-Ponts MP [02726] [correction]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^3 = \text{Id}$$

Décrire les sous-espaces stables de u .

Exercice 14 Mines-Ponts MP [02897] [correction]

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose, pour toute $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt$$

- a) L'opérateur T est-il un automorphisme de E ?
- b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de E de dimension finie impaire et stable par T ?

Eléments propres d'un endomorphisme

Exercice 15 [00762] [correction]

Soient f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \text{sp}(f^n)$.
Montrer que $0 \in \text{sp}(f)$.

Exercice 16 [00763] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que $0 \notin \text{sp}(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.

Exercice 17 [00764] [correction]

Soit u un automorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .
Etablir $\text{Sp}u^{-1} = \{\lambda^{-1}/\lambda \in \text{Sp}u\}$.

Exercice 18 [00765] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, $a \in \text{GL}(E)$ et $v = a \circ u \circ a^{-1}$.
Comparer $\text{Sp}u$ et $\text{Sp}v$ d'une part, $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(v)$ d'autre part.

Exercice 19 [00766] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre.
Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 20 Mines-Ponts MP [02719] [correction]

Soit f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.

- a) Montrer que f est nilpotent.
- b) On suppose $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_e g = \text{diag}(\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1)$$

Etude pratique des éléments propres d'un endomorphisme

Exercice 21 [00767] [correction]

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrices réelles.

- Calculer $AM - MA$.
- Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $M \mapsto AM - MA$.

Exercice 22 [00768] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe sa dérivée f' . Déterminer les valeurs propres de D ainsi que les sous-espaces propres associés.

Exercice 23 [00769] [correction]

Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et I l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe sa primitive qui s'annule en 0. Déterminer les valeurs propres de I .

Exercice 24 [00770] [correction]

Soient $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées et $\Delta : E \rightarrow E$ l'endomorphisme défini par

$$\Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ .

Exercice 25 [03126] [correction]

Soient $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : E \rightarrow E$ l'application qui transforme une suite $u = (u_n)$ en $v = (v_n)$ définie par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Exercice 26 [00771] [correction]

Soit E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}([0, +\infty[\mathbb{R})$ s'annulant en 0. Pour tout $f \in E$, on définit $\varphi(f) : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(0) = 0 \text{ et } \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ pour } x > 0$$

- Montrer que $\varphi(f) \in E$ puis que φ est un endomorphisme de E .
- Déterminer les éléments propres de φ .

Exercice 27 Mines-Ponts MP [02700] [correction]

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit

$$T(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

- Vérifier que T est dans $\mathcal{L}(E)$.
- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T .

Exercice 28 Mines-Ponts MP [03063] [correction]

Soit E l'espace des fonctions f de classe \mathcal{C}^1 de $[0, +\infty[$ vers \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 0$. Pour un élément f de E on pose $T(f)$ la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.

Exercice 29 [03125] [correction]

Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$\varphi : P \mapsto (X^2 - 1)P' - nXP$$

Exercice 30 Centrale MP [03103] [correction]

On considère $n+1$ réels deux à deux distincts a_0, \dots, a_n et A le polynôme

$$A(X) = \prod_{k=0}^n (X - a_k)$$

Soit B un polynôme réel tel que pour tout $k = 0, \dots, n$, $B(a_k) \neq 0$. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le reste $R = f(P)$ de la division euclidienne de BP par A .

- Justifier qu'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Etude d'un exemple avec le logiciel de calcul formel : on demande de résoudre cette question avec le logiciel.

On choisit

$$n = 2, A(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3) \text{ et } B(X) = X^3$$

Ainsi f est ici l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

Créer l'application f . Utiliser la commande « rem » qui fournit le reste de la division euclidienne. Expliciter alors l'image de $P = aX^2 + bX + c$.

Déterminer le noyau de f .

Suivre le même procédé pour déterminer les éléments propres de f , en annulant les coefficients de $Q = f(P) - \lambda P$.

Créer la matrice de f dans la base canonique de E et retrouver ainsi les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

- On revient au cas général. Déterminer le noyau, les éléments propres (valeurs propres, sous-espaces propres) et le déterminant de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Éléments propres d'une matrice

Exercice 31 [00772] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\text{rg}(A) = 1$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$ et que ce scalaire λ est valeur propre de A .

Exercice 32 [00773] [correction]

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Montrer que $\text{sp}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.

Exercice 33 [00774] [correction]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{i,j} > 0$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

- Montrer que $1 \in \text{Sp}(A)$.
- Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.
- Observer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A et vérifie $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.

Exercice 34 [03280] [correction]

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

- Montrer que $1 \in \text{Sp}(A)$.
- Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.
- Observer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A et vérifie $|\lambda| = 1$ alors λ est une racine de l'unité.

Exercice 35 [00775] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = A$.

- Calculer $A^k B - BA^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- A quelle condition la matrice A^k est-elle vecteur propre de l'endomorphisme $M \mapsto MB - BM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- En déduire que la matrice A est nilpotente.

Exercice 36 [00776] [correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A \in E$, on introduit $u : E \rightarrow E$ défini par

$$u(M) = AM$$

Montrer que A et u ont les mêmes valeurs propres et préciser les sous-espaces propres de u en fonction de ceux de A .

Exercice 37 [00777] [correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et Φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\Phi_A(M) = AM$.

- Montrer que les valeurs propres de Φ_A sont les valeurs propres de A .
- Déterminer les valeurs propres de $\Psi_A : M \mapsto MA$.

Exercice 38 Mines-Ponts MP [02729] [correction]

Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

- Trouver une matrice triangulaire inférieure unité L et une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = LU$.

b) Exprimer A^{-1} à l'aide de $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que $\text{Sp}A^{-1} \subset [0, 4]$.

Exercice 39 X MP [02861] [correction]
Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 40 [03173] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer les valeurs propres de la comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On commencera par étudier le cas où la matrice A est inversible.

Exercice 41 Centrale MP [03204] [correction]
Soit $A_n = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$a_{i,i} = 0 \text{ et } a_{i,j} = j \text{ si } i \neq j$$

- a) A l'aide de Maple, calculer les valeurs approchées des valeurs propres de A_2 , A_3 et, si possible A_{10} .
- b) Si λ est valeur propre de A_n , montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{k + \lambda} = 1$$

- c) Nombre et localisation des valeurs propres de A_n ?
- d) On appelle x_n la valeur propre de A_n strictement comprise entre -2 et -1 . Quel est le sens de variation de la suite (x_n) ?
- e) Limite de (x_n) et développement asymptotique à deux termes.

Exercice 42 [03316] [correction]
Soient $n \geq 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

- a) Calculer les rangs de A et A^2 .
- b) Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement représenté par la matrice A . Montrer

$$\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}^n$$

c) En déduire que la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ (0) & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

- d) Calculer $\text{tr} B$ et $\text{tr} B^2$.
En déduire les valeurs propres de B puis celles de A .
- e) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Polynôme caractéristique

Exercice 43 [00778] [correction]

- a) Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- b) Réciproque ?

Exercice 44 [00779] [correction]

Soit F un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.
Établir que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u .

Exercice 45 [00780] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique χ_A .
Établir que pour tout $x \neq 0$, $\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n x^n}{\chi_A(0)} \chi_A(1/x)$.

Exercice 46 [00781] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

a) Etablir l'égalité quand $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) Pour $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{C})$, justifier que pour $t > 0$ suffisamment petit $A + tI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et en déduire que l'égalité est encore vraie.

Exercice 47 [01109] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Etablir

$$\chi_{(AB)^p} = \chi_{(BA)^p}$$

Exercice 48 Mines-Ponts MP [02696] [correction]

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même valeurs propres.

Exercice 49 [02901] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$$

Exercice 50 [01272] [correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En multipliant à droite et à gauche la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$$

par des matrices triangulaires par blocs bien choisies, établir

$$(-\lambda)^p \chi_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^n \chi_{BA}(\lambda)$$

Exercice 51 Mines-Ponts MP [02697] [correction]

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$.

Indice : Commencer par le cas où $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 52 Mines-Ponts MP [02698] [correction]

a) Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire de degré n , existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique P ?

b) Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$.

Montrer, si $q \in \mathbb{N}^*$, que $P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$ appartient à $\mathbb{Z}[X]$.

c) Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont les racines complexes sont de modules ≤ 1 . Montrer que les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Exercice 53 Mines-Ponts MP [02699] [correction]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

a) Comparer $\text{Sp}B$ et $\text{Sp}^t B$.

b) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que s'il existe λ pour lequel $AC = \lambda C$, alors $\text{Im}C \subset \ker(A - \lambda I_n)$.

c) Soit λ une valeur propre commune à A et B . Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \neq 0$, telle que $AC = CB = \lambda C$.

d) On suppose l'existence de $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}C = r$ et $AC = CB$. Montrer que le PGCD des polynômes caractéristiques de A et B est de degré $\geq r$.

e) Etudier la réciproque de d).

Exercice 54 [03083] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}A \subset \mathbb{R}^+$.

Montrer

$$\det A \geq 0$$

Exercice 55 [03121] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset$$

Exercice 56 Centrale MP [03213] [correction]

Soient $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ endomorphisme de rang 2.

Déterminer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\text{tr}f$ et $\text{tr}f^2$.

Calcul de polynôme caractéristique

Exercice 57 [00782] [correction]

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 58 [00784] [correction]

Soient

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } P_n(x) = \det(A_n - xI_n)$$

a) Montrer que

$$P_n(x) = -xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$$

Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

b) Pour tout $x \in]-2, 2[$, on pose $x = -2 \cos \alpha$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}$$

c) En déduire que $P_n(x)$ admet n racines puis que A_n est diagonalisable.

Exercice 59 [00785] [correction]

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$ deux à deux distincts.

On pose

$$P(x) = \det(A + xI_n) \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $P(a_i)$.

b) Justifier que P est un polynôme unitaire de degré n .

c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^n (X - a_i)}$$

d) En déduire le déterminant de $A + I_n$.

Existence de valeur propre sur \mathbb{C}

Exercice 60 [00786] [correction]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

a) Justifier que tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre

b) Observer que l'endomorphisme $P(X) \mapsto (X-1)P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ n'a pas de valeurs propres.

Exercice 61 [00787] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BA$.

Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.

Exercice 62 [00788] [correction]

Montrer que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre en commun si, et seulement si, il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant $UA = BU$.

Exercice 63 Centrale MP [02441] [correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, u, v dans $\mathcal{L}(E)$ et a, b dans \mathbb{R} . On suppose

$$u \circ v - v \circ u = au + bv$$

a) On étudie le cas $a = b = 0$.

Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

b) On étudie le cas $a \neq 0, b = 0$.

Montrer que u est non inversible.

Calculer $u^n \circ v - v \circ u^n$ et montrer que u est nilpotent.

Conclure que u et v ont un vecteur propre en commun.

c) On étudie le cas $a, b \neq 0$.

Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice 64 X MP [02868] [correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = af + bg$.
Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Éléments propres et diagonalisabilité d'une matrice

Exercice 65 [00789] [correction]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

- a) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matrice A est-elle diagonalisable?
- b) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable?
- c) Mêmes questions avec B .

Exercice 66 [00790] [correction]

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?

Exercice 67 [00791] [correction]

Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, lesquelles sont diagonalisables?

Exercice 68 [00792] [correction]

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ (avec } n \geq 2)$$

- a) Calculer $\text{rg}(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- b) Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 69 Mines-Ponts MP [02703] [correction]

Diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 70 Mines-Ponts MP [02704] [correction]

Valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 71 Mines-Ponts MP [02705] [correction]

Soit a, b deux réels, $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \ddots & a & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}$.

Réduire ces deux matrices.

Exercice 72 Mines-Ponts MP [02706] [correction]

On pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

pour tous a, b réels.

- a) Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables?
- b) Etudier et représenter graphiquement l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a, b)^n$ tend vers 0 quand n tend vers ∞ .

Exercice 73 Centrale MP [01557] [correction]

Soient $(a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$A = A(a_1, \dots, a_{2n}) = \begin{pmatrix} (0) & & a_{2n} \\ & \ddots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$$

autrement dit telle que $a_{i,j} = 0$ si $i + j \neq 2n + 1$ et $a_{i,2n+1-i} = a_{2n+1-i}$ pour $i = 1, \dots, 2n$.

a) Etude du cas $n = 2$ avec le logiciel de calcul formel : créer la matrice

$$A = A(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} (0) & & d \\ & c & \\ a & b & (0) \end{pmatrix}$$

et étudier le caractère diagonalisable de A « en situation générale ». Etudier séparément avec le logiciel les cas particuliers non envisagés en situation générale.

Vérifier tous les résultats par un étude directe

b) Soient u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels stables par u tels que

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

Démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable, faisant intervenir les restrictions $u|_{F_1}, \dots, u|_{F_p}$ (où la restriction $u|_{F_i}$ est considérée comme endomorphisme de F_i).

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A(a_1, \dots, a_{2n})$ soit diagonalisable.

d) Comment les résultats sont-ils modifiés si la matrice A est réelle et qu'on étudie si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

Exercice 74 [03123] [correction]

Monter que la matrice suivante est diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n & \ddots & 2 & \\ & n-1 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$$

(indice : on pourra interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$)

Exercice 75 X PSI [03255] [correction]

Soit

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & & (b) \\ & \ddots & \\ (a) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

A quelle condition la matrice M_n est-elle diagonalisable ? Déterminer alors une base de vecteurs propres

Exercice 76 [03283] [correction]

a) Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

en fonction du polynôme $P(X) = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0)$.

b) Soit λ une racine de P . Déterminer le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ .

c) A quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?

Diagonalisabilité des matrices de rang 1

Exercice 77 [00793] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}A = 1$.

Etablir : A diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr}A \neq 0$.

Exercice 78 [00794] [correction]

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls.

A quelle condition la matrice $X^t Y$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 79 Centrale MP [02391] [correction]

Soient \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Montrer que J est diagonalisable.

Exercice 80 Mines-Ponts MP [02702] [correction]

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. La matrice $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ est-elle diagonalisable ?

Etude de matrices diagonalisables

Exercice 81 [00796] [correction]

Montrer que si A est diagonalisable alors ${}^t A$ l'est aussi.

Exercice 82 [01673] [correction]

Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose la matrice AB diagonalisable. Montrer que BA est diagonalisable.

Exercice 83 [00797] [correction]

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A_1 et A_2 le sont.

Exercice 84 [00798] [correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}$.

- a) Etudier les valeurs propres de B en fonction de celles de A .
- b) On suppose A diagonalisable. B est-elle diagonalisable ?

Exercice 85 Centrale PC [03113] [correction]

a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $\text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset$.

Montrer que pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices suivantes sont semblables

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O_n & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{pmatrix}$$

Exercice 86 [02453] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec B diagonalisable.

Montrer

$$AB^3 = B^3A \Rightarrow AB = BA$$

Exercice 87 [03122] [correction]

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A, B diagonalisables. Montrer

$$A^p M B^q = O_n \Rightarrow A M B = O_n$$

Eléments propres et diagonalisabilité d'un endomorphisme

Exercice 88 [00799] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E .

On suppose que

$$\text{Im}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u + \text{Id}_E) = \{0\}$$

Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 89 [00800] [correction]

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = P - (X + 1)P'$.

- a) Justifier que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Déterminer les valeurs propres de φ et justifier que φ est diagonalisable.

Exercice 90 [00801] [correction]

Montrer que l'application $f : P(X) \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Former la matrice de f relative à la base canonique de E . En déduire la diagonalisabilité de f ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 91 [00802] [correction]

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$$

- Montrer que $\varphi(P) \in E$ puis que φ est un endomorphisme de E .
- Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 92 [00803] [correction]

L'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\phi(M) = M + \text{tr}(M).I_n$$

est-il diagonalisable ?

Exercice 93 [00804] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ définie par $F(u) = f \circ u$.

- Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, F l'est.
- Montrer que f et F ont les mêmes valeurs propres.
- Soit λ une valeur propre de f . Etablir $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$.

Exercice 94 [03015] [correction]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, un projecteur fixé de E et $\mathcal{F} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\mathcal{F} : f \mapsto \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$.

- \mathcal{F} est-elle linéaire ?
- \mathcal{F} est-elle diagonalisable ?
- Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés ?

Exercice 95 Mines-Ponts MP [02718] [correction]

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples de degré $n + 1$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B . Déterminer les éléments propres de Φ .

L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 96 Mines-Ponts MP [02722] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Etudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $u \mapsto fu - uf$ de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 97 Mines-Ponts MP [02717] [correction]

Dans \mathbb{R}^3 euclidien, on considère deux vecteurs a et b , et on pose $f(x) = a \wedge (b \wedge x)$. A quelle condition, f est-elle diagonalisable ?

Exercice 98 Mines-Ponts MP [02723] [correction]

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $T \in \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ par $T(g) = f \circ g - g \circ f$.

Montrer que si f est diagonalisable, alors T est diagonalisable ; si f est nilpotente, alors T est nilpotente.

Etude d'endomorphismes diagonalisables

Exercice 99 [00805] [correction]

Soient f, g endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \text{chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g$$

Exercice 100 [00806] [correction]

Soit v un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie diagonalisable.

Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E qui soit un polynôme en v et qui vérifie $u^2 = v$.

Exercice 101 [00807] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E ayant la propriété.

« Tout sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable »

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 102 [00808] [correction]

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n .

On note \mathcal{C}_f l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .

- Montrer que \mathcal{C}_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer qu'un endomorphisme g appartient à \mathcal{C}_f si, et seulement si, chaque sous-espace propre de f est stable par g .

c) En déduire que

$$\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \alpha_\lambda^2$$

où α_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .

d) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de \mathcal{C}_f .

Exercice 103 [00809] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

a) Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est base de E .

b) Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?

Exercice 104 [00810] [correction]

Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\varphi : M \mapsto DM - MD$ endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Calculer $\varphi(E_{i,j})$ où $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire d'indice (i, j) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Quelle particularité présente la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

b) Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

L'endomorphisme $\phi : u \mapsto f \circ u - u \circ f$ de $\mathcal{L}(E)$ est-il diagonalisable ?

Exercice 105 X MP [02675] [correction]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que tout sous-espace vectoriel de E stable par f possède un supplémentaire stable.

Exercice 106 Centrale PSI [01324] [correction]

Soient $E = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Phi : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\Phi(S) = AS + {}^tAS$$

a) Déterminer la matrice de Φ dans une base de E .

b) Quelle relation existe-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_Φ et χ_A ?

c) Si Φ est diagonalisable, la matrice A l'est-elle ?

d) Si A est diagonalisable, l'endomorphisme Φ l'est-il ?

Applications de la diagonalisabilité

Exercice 107 [00811] [correction]

Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 108 [00812] [correction]

Soit $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & 2 \sin \theta \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \theta \end{pmatrix}$.

a) Déterminer deux réels α, β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

b) Calculer A^n pour $n \geq 1$.

Exercice 109 [00813] [correction]

a) Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Combien y a-t-il de matrice M telle que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 110 [00814] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

a) Diagonaliser la matrice A en précisant la matrice de passage P

b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 + M = A$.

Justifier que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.

c) Déterminer les solutions de l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 111 [00815] [correction]

Soit pour $n \geq 2$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
 b) Application : calculer

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 112 Mines-Ponts MP [02692] [correction]

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 113 X MP [02980] [correction]

Soit φ une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vers \mathbb{C} vérifiant :

$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ et $\varphi \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda$. Montrer que $\varphi = \det$.

Exercice 114 Centrale PC [01279] [correction]

- a) Démontrer que, si deux endomorphismes u et v d'un espace vectoriel E commutent, alors, les sous-espaces propres de u et l'image de u sont stables par v .
 Dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 12 & -4 & 12 \\ -4 & -3 & 9 & -5 \\ -4 & 1 & 5 & -5 \\ -8 & -10 & 6 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -12 & -16 & -8 & -4 \\ 4 & 13 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \\ 8 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- b) Préciser les matrices qui commutent avec A (structure, dimension, base éventuelle).
 c) Etudier dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, l'équation

$$X^2 = A$$

(nombre de solutions, un exemple de solution quand il y en a, somme et produit des solutions quand elles sont en nombre fini).

Exercice 115 [03145] [correction]

Soit G un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ vérifiant

$$\forall M \in G, M^2 = I_n$$

- a) Montrer que G est commutatif.
 b) En déduire que les éléments de G sont codiagonalisables.
 c) En déduire

$$\text{Card}G \leq 2^n$$

- d) Application : Montrer que s'il existe un isomorphisme entre $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et $(\text{GL}_m(\mathbb{R}), \times)$ alors $n = m$.

Exercice 116 CCP MP [03215] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{Sp}A = \{-2, 1, 3\}$$

- a) Exprimer A^n en fonction de A^2 , A et I_3 .
 b) Calculer

$$\text{ch}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$$

Exercice 117 [03252] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n possédant exactement n valeurs propres.

- a) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de f .
 b) Soit g un endomorphisme de E vérifiant $g^2 = f$. Montrer que g et f commutent. En déduire que les vecteurs propres de f sont aussi vecteurs propres de g .
 c) Combien y a-t-il d'endomorphismes g de E solutions de l'équation

$$g^2 = f$$

Exercice 118 X MP [03270] [correction]

- a) Déterminer les entiers k pour lesquelles l'équation

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

admet au moins une solution $\theta \in \mathbb{R}$.

- b) Soit S_k l'ensemble des suites réelles u telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n + u_{n+k-1}$$

A quelle condition sur k , S_k contient-il une suite périodique non nulle.

Exercice 119 [03276] [correction]

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

A quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) , ces trois suites sont-elles convergentes ?

Trigonalisation

Exercice 120 [00816] [correction]

Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Exercice 121 [00817] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_A scindé.

- a) Justifier que A est trigonalisable.
- b) Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Sp}(A^k) = \{ \lambda^k / \lambda \in \text{Sp}(A) \}$$

Exercice 122 [00818] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

Déterminer une matrice de polynôme caractéristique

$$\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^p)$$

Exercice 123 [00819] [correction]

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}A)$.

Exercice 124 [03120] [correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose le polynôme caractéristique de A de la forme

$$\chi_A(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

Exprimer le polynôme caractéristique de $P(A)$.

Exercice 125 [00820] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de A .
- b) Trigonaliser la matrice A .

Exercice 126 [00821] [correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer le polynôme caractéristique de A .
- b) Trigonaliser la matrice A .

Exercice 127 Centrale MP [02389] [correction]

a) Soit A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que soit $B \in \mathbb{K}[A]$, soit $A \in \mathbb{K}[B]$.

b) Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$?

Exercice 128 Centrale MP [02395] [correction]

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Soient u et v des endomorphismes de E ; on pose $[u, v] = uv - vu$.

- a) On suppose $[u, v] = 0$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.
- b) On suppose $[u, v] = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que u est nilpotent et que u et v sont cotrigonalisables.
- c) On suppose l'existence de complexes α et β tels que $[u, v] = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

Exercice 129 X MP [02954] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{tr}(A^m) \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$.
Montrer que les valeurs propres de A sont de module < 1

Exercice 130 [03284] [correction]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = O_n$.

- Montrer que les matrices A et B ont un vecteur propre en commun.
- Etablir que A et B sont simultanément trigonalisable

Polynôme annulateur, polynôme minimal

Exercice 131 [02916] [correction]

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

On suppose connus deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement.

Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M .

Exercice 132 [00822] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Justifier l'existence d'un entier $p \geq 0$ tel que la famille $(\text{Id}, u, \dots, u^p)$ soit liée.

En déduire que u possède un polynôme annulateur non nul.

Exercice 133 [00823] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les espaces $\ker(u \circ (u - \text{Id}))$ et $\ker(u \circ (u + \text{Id}))$ soient supplémentaires.

Montrer que u est une symétrie vectorielle.

Exercice 134 [00824] [correction]

Soient u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel admettant un polynôme minimal Π_u et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si, P et Π_u sont premiers entre eux.

Observer qu'alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 135 [00825] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G stables par u .

Etablir que $\Pi_u = \text{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G})$ (en notant Π_v le polynôme minimal d'un endomorphisme v).

Exercice 136 [00826] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

Si u admet un polynôme minimal Π_u et si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors montrer que u_F admet un polynôme minimal et que celui-ci divise Π_u .

Exercice 137 [00827] [correction]

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme minimal $(X - 1)^2$ est semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme (1) ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 138 [00829] [correction]

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E tels que $f \circ g - g \circ f = I$.

- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $f^n \circ g - g \circ f^n = n f^{n-1}$.
- En dimension finie non nulle, montrer qu'il n'existe pas deux endomorphismes f et g tels que $f \circ g - g \circ f = I$.
- Montrer que dans $E = \mathbb{K}[X]$ les endomorphismes f et g définis par $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$ conviennent.

Exercice 139 Centrale MP [02393] [correction]

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de polynôme minimal $X^2 + 1$?

Exercice 140 Mines-Ponts MP [02681] [correction]

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et a un élément non nul de \mathbb{K} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 3af^2 + a^2f = 0$. Est-il vrai que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires ?

Exercice 141 Mines-Ponts MP [02708] [correction]

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{C}).$$

Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) = 0$?

Exercice 142 Mines-Ponts MP [02727] [correction]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal Π_f . Montrer l'existence de $x \in E$ tel que $\{P \in \mathbb{C}[X] / P(f)(x) = 0\}$ soit l'ensemble des multiples de Π_f .

Exercice 143 X MP [02986] [correction]

Soient N une norme sur \mathbb{C}^n et $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui lui est associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que 1 est valeur propre de A et $\|A\| \leq 1$. Montrer que 1 est racine simple du polynôme minimal de A .

Exercice 144 X MP [03073] [correction]

Etant donné E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et λ un scalaire, on dit que λ est séparable si le noyau et l'image de $u - \lambda \text{Id}$ sont supplémentaires.

- Montrer que tout scalaire non séparable de u en est une valeur propre.
- Montrer qu'un endomorphisme scindé est diagonalisable si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont séparables.
- Caractériser la séparabilité d'une valeur propre à l'aide du polynôme minimal de u .
- Soit, avec ces notations, l'endomorphisme m de $\mathcal{L}(E)$ qui à v associe $u \circ v$. Comparer l'ensembles ses scalaires séparables relativement à m avec celui des scalaires séparables relativement à u .

Exercice 145 X MP [01353] [correction]

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$, existe-t-il $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R(Q(u)) = 0$?

Exercice 146 [02442] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \neq 0$$

Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E .

Exercice 147 [03277] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur de u dont 0 est racine simple. Montrer

$$\ker u = \ker u^2$$

Polynômes annulateurs et valeurs propres

Exercice 148 [00830] [correction]

Soit P un polynôme annulateur d'un endomorphisme f . Montrer que si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$.

Exercice 149 [00831] [correction]

Pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$. L'application $\varphi : f \mapsto \tilde{f}$ est clairement un endomorphisme involutif de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Quelles en sont les valeurs propres ?

Exercice 150 [00832] [correction]

Soit $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme défini par $T(P) = P(1 - X)$.

- Montrer que T est un automorphisme.
- Déterminer valeurs propres de T .

Exercice 151 [00833] [correction]

Montrer que si un endomorphisme u d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E admet un polynôme minimal Π_u alors les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme minimal.

Exercice 152 Mines-Ponts MP [02715] [correction]

Trouver les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t M = M^2$ et que M n'ait aucune valeur propre réelle.

Exercice 153 [00783] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

- Calculer χ_A .
- Même question avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème de Cayley Hamilton**Exercice 154** [00834] [correction]

Déterminer un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exprimer A^{-1} lorsque celle-ci existe.

Exercice 155 [00835] [correction]

Soit $A \in \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ est annulateur de A .

Exercice 156 [03019] [correction]

Soit u un automorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que u^{-1} est un polynôme en u .

Exercice 157 [00836] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension n . On suppose que f possède une unique valeur propre λ .

- A quelle condition l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
- Calculer le polynôme caractéristique de f .
- Justifier que l'endomorphisme $f - \lambda \text{Id}$ est nilpotent.

Exercice 158 [00839] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

On suppose qu'il existe $x \in E$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x))$ soit une famille génératrice de E .

- Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
- Démontrer que les endomorphismes commutant avec f sont les polynômes en f .

Exercice 159 [00840] [correction]

Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$ avec $M \neq O_n$.

- Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
- Montrer que A et B ont une valeur propre en commun.

Exercice 160 Mines-Ponts MP [02667] [correction]

Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

Exercice 161 Centrale MP [03114] [correction]

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à deux et q un nombre complexe non nul tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $q^k \neq 1$. On considère également une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- On suppose qu'il existe $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^{-1}AM = qM$$

On note χ_A le polynôme caractéristique de A . Déterminer une relation entre $\chi_A(X)$ et $\chi_A\left(\frac{X}{q}\right)$.

En déduire que A est nilpotente.

- Cette question est à résoudre à l'aide du logiciel de calcul formel. Dans cette question, on suppose que $q = 2$ et que A est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ vérifiant

$$AM = 2MA$$

- Que dire de l'ensemble des matrices M ainsi obtenues ?
- Déterminer les matrices $M \in \text{GL}_6(\mathbb{C})$ vérifiant

$$M^{-1}AM = 2A$$

Exercice 162 Centrale PC [03185] [correction]

a) Soit u un endomorphisme inversible d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$u^{-1} = Q(u)$$

b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(2X)$.

Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses éléments propres.

Existe-t-il $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$u^{-1} = Q(u)?$$

Calcul de polynôme minimal

Exercice 163 [00841] [correction]

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer μ_A .

Exercice 164 [00842] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } n \geq 2$$

a) Montrer que M est diagonalisable.

b) Déterminer le polynôme minimal de M .

c) Calculer M^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 165 [00843] [correction]

Soit a un réel. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$L(M) = aM + \text{tr}(M)I_n$$

a) Montrer que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trouver ses éléments propres et son polynôme minimal.

b) Pour quels a , L est-il un automorphisme? Trouver son inverse dans ces cas.

Exercice 166 [00845] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n .

a) On suppose que f est diagonalisable. A quelle condition existe-t-il un vecteur $x \in E$ tel que la famille formée des vecteurs $x_1 = x, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$ forme une base de E ?

b) On ne suppose plus f diagonalisable mais on suppose l'existence d'une base (x_1, x_2, \dots, x_n) de E du type précédent. Déterminer le commutant de f . Quel est le polynôme minimal de f ?

Exercice 167 Mines-Ponts MP [02710] [correction]

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que dire de cette matrice? Sans la diagonaliser,

déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal, calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$ et évaluer $\exp(A)$.

Exercice 168 Mines-Ponts MP [02707] [correction]

Soient $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les éléments diagonaux valent a et les autres valent b . A est-elle diagonalisable? Quelles sont les valeurs propres de A ? Quel est le polynôme minimal de A ? Sous quelles conditions sur a et b , A est-elle inversible? Lorsque c'est le cas trouver l'inverse de A .

Exercice 169 Mines-Ponts MP [02701] [correction]

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme minimal de A .

b) La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.

c) Calculer e^A .

Exercice 170 Mines-Ponts MP [02711] [correction]

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique

et le polynôme minimal de A . Calculer $\exp A$ et $\exp(A) \exp({}^t A)$.

Exercice 171 Mines-Ponts MP [02712] [\[correction\]](#)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$. Etudier la diagonalisabilité de A , déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A , calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n .

Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Exercice 172 [00846] [\[correction\]](#)

Montrer qu'une matrice de permutation est diagonalisable.

Exercice 173 [00847] [\[correction\]](#)

Soit $A = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ -I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Calculer A^2 .

Selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} dire si la matrice A est, ou non, diagonalisable.

Exercice 174 [00848] [\[correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} O & -I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

- Calculer A^2 .
- La matrice A est-elle diagonalisable? Déterminer les valeurs propres de A et les dimensions de ses espaces propres?

Exercice 175 [00849] [\[correction\]](#)

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^3 = 4f$$

Montrer que la trace de f est un entier pair.

Exercice 176 [00850] [\[correction\]](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I = O$. Montrer que $\det(A) = 1$.

Exercice 177 [00851] [\[correction\]](#)

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que p^2 soit un projecteur.

- Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?
- Montrer que p est diagonalisable si, et seulement si, $p^3 = p$.

Exercice 178 [00852] [\[correction\]](#)

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^4 = f^2$$

On suppose que 1 et -1 sont valeurs propres de f . Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 179 Mines-Ponts MP [02714] [\[correction\]](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\text{rg} A$ est pair.

Exercice 180 Mines-Ponts MP [02716] [\[correction\]](#)

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le système $\begin{cases} M^2 + M + I_n = 0 \\ {}^t M M = M^t M \end{cases}$.

Exercice 181 [03030] [\[correction\]](#)

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = PM + MP$$

Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable

Exercice 182 Mines-Ponts MP [02720] [\[correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$. On suppose $u^3 = u$, $\text{tr} u = 0$ et $\text{tr} u^2 = 2n$. On note

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) / uv = vu\}$$

- Calculer la dimension $C(u)$.
- Quels sont les n tels que $C(u) = \mathbb{R}[u]$?

Exercice 183 Mines-Ponts MP [02721] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $f_A(M) = AM$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que si $A^2 = A$ alors f_A est diagonalisable.
- Montrer que f_A est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 184 Centrale MP [00853] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $f(M) = AM$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- L'application f est-elle un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
- Etudier l'équivalence entre les inversibilités de A et de f .
- Etudier l'équivalence entre les diagonalisabilités de A et de f .

Exercice 185 X MP [00838] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifiant :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, A^n = I_2$$

Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 186 X MP [02652] [correction]

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note

$$E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) / \exists m \in \mathbb{N}^*, A^m = I_n\}$$

Pour $A \in E_n$, on pose

$$\omega(A) = \min \{m \in \mathbb{N}^* / A^m = I_n\}$$

Montrer que $\omega(E_n)$ est fini.

Exercice 187 [03138] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

- Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 188 [03281] [correction]

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$

- Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

- Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

Exercice 189 [02953] [correction]

Déterminer les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 190 [03027] [correction]

Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$.

Exercice 191 [03028] [correction]

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et u, v, f trois endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie vérifiant

$$\begin{cases} f = \alpha u + \beta v \\ f^2 = \alpha^2 u + \beta^2 v \\ f^3 = \alpha^3 u + \beta^3 v \end{cases}$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 192 Mines-Ponts PC [00708] [correction]

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ tel que

$$C = A + B, C^2 = 2A + 3B \text{ et } C^3 = 5A + 6B$$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables.

Exercice 193 Mines-Ponts MP [03291] [correction]

a) Montrer que, pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$, on a l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

si, et seulement si, il existe $n - 1$ réels positifs $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall k \geq 2, z_k = \alpha_k z_1$$

b) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M^n = I_n$ et $\text{tr}M = n$

Diagonalisabilité et endomorphisme induit

Exercice 194 [00854] [correction]

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que la restriction de f à tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$ stable est diagonalisable.

Exercice 195 [00855] [correction]

Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer qu'un sous-espace vectoriel F non nul est stable par u si, et seulement si, il possède une base de vecteurs propres de u .

Exercice 196 [03038] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel pour lequel il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ vérifiant $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_1 + e_2$.
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 197 [00856] [correction]

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par f .

Exercice 198 [00857] [correction]

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que f et g sont simultanément diagonalisables si, et seulement si, chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

Exercice 199 [00858] [correction]

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que f et g commutent si, et seulement si, f et g sont simultanément diagonalisables.

Diagonalisabilité des polynômes en un endomorphisme

Exercice 200 [00859] [correction]

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

a) On suppose que u est diagonalisable, montrer que $P(u)$ l'est aussi.

b) Que dire de la réciproque ?

Exercice 201 [00860] [correction]

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E tel que f^2 soit diagonalisable.

a) Par un exemple, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

b) Montrer que si f est aussi diagonalisable alors $\ker f = \ker f^2$.

c) Etablir la réciproque.

Exercice 202 [00861] [correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) Énoncer un critère de diagonalisabilité en terme de polynôme annulateur.

b) On suppose $u \in \text{GL}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, u^2 l'est.

c) Généralisation : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose $P'(u) \in \text{GL}(E)$

Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $P(u)$ l'est.

Exercice 203 [00862] [correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soit P un polynôme complexe, on suppose que $P(u)$ est diagonalisable et que la valeur prise par P sur toute racine complexe de P' n'est pas valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$.

Montrer que u est diagonalisable.

Trigonalisabilité et polynôme annulateur**Exercice 204** [00864] [correction]

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 3$) vérifiant

$$\operatorname{rg} A = 2, \operatorname{tr} A = 0 \text{ et } A^n \neq O_n$$

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 205 [00866] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que 0 soit la seule valeur propre de A .

- Montrer que $A^n = 0$.
- Calculer $\det(A + I_n)$.
- Soit $M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ commutant avec A . Calculer $\det(A + M)$.
- Inversement, quelles sont les matrices A vérifiant :

$$\forall M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}), AM = MA \Rightarrow \det(A + M) = \det M?$$

Exercice 206 Mines-Ponts MP [02713] [correction]

Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$.

Exercice 207 Mines-Ponts MP [02724] [correction]

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n . Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\operatorname{tr} A^p = 0$.

Exercice 208 Mines-Ponts PC [01948] [correction]

Trouver les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\operatorname{tr} M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n$$

Exercice 209 [03239] [correction]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$f^2 = f^3 \text{ et } \dim \ker(f - \operatorname{Id}) = 1$$

Montrer l'existence d'une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha \in \{0, 1\}$$

Nilpotence**Exercice 210** [00863] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

- Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
- Le résultat est-il encore vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 211 [00837] [correction]

Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer que u possède une seule valeur propre si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ soit nilpotent.

Exercice 212 [00828] [correction]

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E vérifiant

$$f \circ g - g \circ f = f$$

- Calculer

$$f^n \circ g - g \circ f^n$$

- Soit P un polynôme. Montrer que si $P(f) = 0$ alors $f \circ P'(f) = 0$.
- En déduire que f est un endomorphisme nilpotent.

Exercice 213 [00865] [correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Montrer que f est nilpotent si, et seulement si,

$$\operatorname{Sp}(f) = \{0\}$$

- Montrer que f est nilpotent si, et seulement si,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \operatorname{tr}(f^k) = 0$$

Exercice 214 [03031] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$T(M) = AM - MA$$

- a) On suppose que la matrice A est nilpotente.
Montrer que l'endomorphisme T est aussi nilpotent.
b) Réciproque ?

Exercice 215 X MP [00938] [correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ deux à deux distincts dans \mathbb{C} . On suppose, pour $1 \leq i \leq n+1$, que $A + \lambda_i B$ est nilpotente.
Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 216 X MP [03023] [correction]

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $\mathcal{I}_1 = \{P \in \mathbb{C}[X] / P(u) = 0\}$ et $\mathcal{I}_2 = \{P \in \mathbb{C}[X] / P(u) \text{ est nilpotent}\}$.
a) Montrer que \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont des idéaux non nuls de $\mathbb{C}[X]$.
On note P_1 et P_2 leurs générateurs unitaires respectifs.
b) Etablir un lien entre P_1 et P_2 .
c) Montrer l'existence de $Q \in \mathcal{I}_2$ tel que $u - Q(u)$ est diagonalisable

Exercice 217 X PC [03095] [correction]

Soit $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B) \text{ et } \Phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \Phi(I_2)$$

- a) Démontrer que $\Phi(O_2) = 0$.
b) Si A est nilpotente, démontrer que $\Phi(A) = 0$.
c) Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et B la matrice obtenue à partir de A en permutant les lignes de A .
Démontrer que $\Phi(B) = -\Phi(A)$.
d) Démontrer que A est inversible si, et seulement si, $\Phi(A) \neq 0$.

Exercice 218 Centrale MP [01959] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente non nulle. On appelle indice de nilpotence de A le nombre entier

$$\text{Ind}(A) = \min \{k \in \mathbb{N}^* / A^k = 0\}$$

1. Quelle est la dimension de l'algèbre $\mathbb{K}[A]$ engendrée par A ?
2.a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 1$. Démontrer que la matrice $B = AP(A)$ est nilpotente, de même indice que A .
2.b) En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $Q(0) \neq 0$ et $A = BQ(B)$.
3. Cette question doit être traitée avec le logiciel de calcul formel. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_8(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 8 \rrbracket^2, A[i, j] = 1 \text{ si } i = j - 1 \text{ ou si } i = j - 4 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

- 3.a) Vérifier que A est nilpotente et calculer son indice de nilpotence.
3.b) On suppose ici que $P = 1 + X + 2X^2 + 3X^3$ et $B = AP(A)$. Déterminer explicitement un polynôme Q de coefficient constant non nul tel que $A = BQ(B)$.
Indication : on peut chercher Q de degré strictement inférieur à l'indice de nilpotence de A .

Exercice 219 Mines-Ponts PC [01956] [correction]

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,i+1} = 1$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.
a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
b) Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$?

Exercice 220 [01677] [correction]

Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente telles que

$$AN = NA$$

Montrer que

$$\det(A + N) = \det A$$

Exercice 221 Centrale MP [00867] [correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

- a) Montrer que $A^n = 0$.
b) Calculer $\det(A + I_n)$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM = MA$.
c) Calculer $\det(A + M)$ (on pourra commencer par le cas où $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$).
d) Le résultat est-il vrai si M ne commute pas avec A ?

Exercice 222 Mines-Ponts MP [02690] [correction]

Soit A et B des matrices complexes carrées d'ordre n . On suppose $A + 2^k B$ nilpotente pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 223 [03253] [correction]

Soient n un entier naturel non nul et E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

a) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant au voisinage de 0

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$$

b) Etablir que X^n divise alors le polynôme $P_n^2(X) - X - 1$.

c) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = \tilde{0}$.

Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant

$$g^2 = \text{Id}_E + f$$

d) Soit maintenant f un endomorphisme de E ne possédant qu'une valeur propre λ .

Montrer que $(f - \lambda \text{Id}_E)^n = \tilde{0}$ et conclure qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant

$$g^2 = f$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

La famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ constitue une base de E . Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u . On peut écrire $v(x_0) = a_0x_0 + a_1u(x_0) + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x_0)$. Considérons alors $w = a_0\text{Id} + a_1u + \dots + a_{n-1}u^{n-1} \in \mathbb{K}[u]$. $v(x_0) = w(x_0)$ et puisque v et w commutent avec u , on a aussi $v(u^k(x_0)) = w(u^k(x_0))$. Les endomorphismes v et w prennent même valeurs sur une base, ils sont donc égaux et ainsi $v \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 2 : [énoncé]

$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ avec $X - 1$ et $X^2 + X + 1$ premiers entre eux, il suffit donc d'appliquer le lemme des noyaux.

Exercice 3 : [énoncé]

On sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$.

En introduisant les coefficients de P , la relation $B = AP(A)$ donne

$$B = A + a_2A^2 + \dots + a_{p-1}A^{p-1}.$$

On en déduit

$$B^2 = A^2 + a_{3,2}A^3 + \dots + a_{p-1,2}A^{p-1}, \dots, B^{p-2} = A^{p-2} + a_{p-1,p-2}A^{p-1},$$

$$B^{p-1} = A^{p-1}.$$

En inversant ces équations, on obtient

$$A^{p-1} = B^{p-1}, A^{p-2} = B^{p-2} + b_{p-1,p-2}A^{p-1}, \dots,$$

$$A^2 = B^2 + b_{3,2}B^3 + \dots + b_{p-1,2}B^{p-1} \text{ et enfin } A = B + b_{2,1}B^2 + \dots + b_{p-1,1}B^{p-1}$$

ce qui détermine un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $Q(0) = 1$ et $A = BQ(B)$.

Exercice 4 : [énoncé]

a) Posons $N = -A^{-1}BA$. On a

$$N^p = (-1)^p A^{-1}B^pA = O_n$$

donc

$$I_n = I_n - N^p = (I - N)(I + N + N^2 + \dots + N^{p-1})$$

On en déduit que $I - N = I_n + A^{-1}BA$ est inversible et

$$(I_n + A^{-1}BA)^{-1} = I + N + N^2 + \dots + N^{p-1}$$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On a

$$P(X) = aX + bX^2 + \dots$$

Donc

$$P(B) = aB + bB^2 + \dots$$

puis

$$P(B)^p = a^p B^p + b^p B^{p+1} + \dots = O_n$$

On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $I_n + P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme

$$I_n - P(B) + P(B)^2 + \dots + (-1)^p P(B)^p$$

On en déduit que H est inclus dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H .

Il est immédiat de vérifier que H est non vide et stable par produit. On en déduit que H est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$. Enfin, on vérifie que H est commutatif car les polynômes en une matrice commutent entre eux.

Exercice 5 : [énoncé]

$\forall y \in \text{Im}u, \exists x \in E, y = u(x)$ et $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}u$ donc $\text{Im}u$ est stable par v .

$\forall x \in \ker u, u(x) = 0$ donc $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ et $v(x) \in \ker u$. Ainsi $\ker u$ est stable par v .

La réciproque est fautive, si u est un automorphisme il est certain que $\text{Im}u = E$ et $\ker u = \{0\}$ seront stables par v alors qu'il n'y a aucune raison que u et v commutent.

Exercice 6 : [énoncé]

Supposons $f \circ p = p \circ f$. Pour tout $x \in \ker p, p(f(x)) = f(p(x)) = 0$ donc

$$f(x) \in \ker p.$$

Rappelons $\text{Im}p = \ker(p - \text{Id})$. Pour tout $x \in \text{Im}p, p(f(x)) = f(p(x)) = f(x)$ donc

$$f(x) \in \text{Im}p.$$

Inversement. Supposons $\ker p$ et $\text{Im}p$ stables par f . Pour tout $x \in E$, on peut

écrire $x = u + v$ avec $u \in \ker p$ et $v \in \text{Im}p$. On a alors $f(p(x)) = f(v)$ et

$$p(f(x)) = p(f(u) + f(v)) = f(v) \text{ donc } p \circ f = f \circ p.$$

Exercice 7 : [énoncé]

Les $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation.

Soit F un sous-espace vectoriel stable.

Si F est de dimension finie alors les polynômes de F sont de degrés bornés.

Soit P un polynôme de F de degré n maximal. On a $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

Or la famille des polynômes $P, P', P'', \dots, P^{(n)}$ est de degrés étagés et formés d'éléments de F car F est stable pour la dérivation donc

$\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(P, P', \dots, P^{(n)}) \subset F$ puis $F = \mathbb{K}_n[X]$.

Si F n'est pas de dimension finie alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $F \not\subset \mathbb{K}_m[X]$ et donc il existe $P \in F$ tel que $n = \deg P > m$. Or en raisonnant comme ci-dessus, on démontre $\mathbb{K}_n[X] \subset F$ et donc $\mathbb{K}_m[X] \subset F$. Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_m[X] \subset F$ donc $F = \mathbb{K}[X]$.

Finalement les $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$ sont les seuls sous-espace vectoriels stables pour l'endomorphisme de dérivation.

Exercice 8 : [énoncé]

a) Rappelons que les suites $(\ker u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im} u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion. La suite $(\dim \ker u^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée d'entiers naturels, elle est donc stationnaire :

$\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \dim \ker u^p = \dim \ker u^n$ or $\ker u^p \supset \ker u^n$ donc $\ker u^p = \ker u^n$ puis $N = \ker u^n$. Aussi

$\dim \text{Im} u^p = \dim E - \dim \ker u^p = \dim E - \dim \ker u^n = \dim \text{Im} u^n$ et $\text{Im} u^p \subset \text{Im} u^n$ donc $\text{Im} u^p = \text{Im} u^n$ puis $I = \text{Im} u^n$.

b) $\dim N + \dim I = \dim \ker u^n + \dim \text{Im} u^n = \dim E$ en vertu du théorème du rang. Soit $x \in N \cap I$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u^n(a)$ et alors $u^n(x) = 0$ donc $u^{2n}(a) = 0$. Ainsi $a \in \ker u^{2n} = \ker u^n$ donc $x = u^n(a) = 0$. Ainsi $N \cap I = \{0\}$ d'où $E = N \oplus I$.

u et u^n commutent donc N et I sont stables par u .

$(u_N)^n = (u^n)_{\ker u^n} = 0$ donc u_N est nilpotente.

$\text{Im} u^{n+1} = \text{Im} u^n$ donne $u(\text{Im} u^n) = \text{Im} u^n$ donc u_I est surjective puis bijective car $\dim \text{Im} u^n < +\infty$.

c) Par supplémentarité : $\dim E = \dim F + \dim G = \dim N + \dim I$.

Il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $(u_F)^p = 0$ donc $F \subset \ker u^p \subset N$.

u_G est bijective donc $(u_G)^n$ aussi or $G = \text{Im}(u_G)^n \subset \text{Im}(u^n) = I$.

On a alors $\dim F \leq \dim N$, $\dim G \leq \dim I$ et $\dim F + \dim G = \dim N + \dim I$ donc $\dim F = \dim N$ et $\dim G = \dim I$. Par inclusion et égalité des dimensions $F = N$ et $G = I$.

Exercice 9 : [énoncé]

a) Le cas $n = 1$ est immédiat car v est alors nécessairement nul.

Le cas $v = 0$ est tout aussi immédiat.

b) $F = \text{Im} v$ est stable par u et v et puisque v n'est pas bijectif, $1 \leq \dim F < n$: on pourra donc appliquer l'hypothèse de récurrence sur F . Dans une base adaptée

à F les matrices de u et v sont de la forme : $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} D & E \\ \hline O & O \end{array} \right)$ donc

$\det(u + v) = \det(A + D) \times \det C$.

c) A et D sont associées aux endomorphismes induits par u et v sur F . Ces endomorphismes induits vérifient les hypothèses initiales et donc $\det(A + D) = \det A$ puis $\det(u + v) = \det A \times \det C = \det u$.

Exercice 10 : [énoncé]

a) $\text{Im} u$ est stable pour u donc u_{E_2} est bien défini. Par le théorème du rang la restriction de u à tout supplémentaire de $\ker u$ définit un isomorphisme avec $\text{Im} u$. Ici cela donne u_{E_2} automorphisme.

b) Soient $u, v \in \Gamma$. Si $x \in \ker(v \circ u)$ alors $u(x) \in \text{Im} u \cap \ker v$ donc $u(x) \in E_1 \cap E_2$ et $u(x) = 0$ puis $x \in E_1$. Ainsi $\ker(v \circ u) \subset E_1$ et l'inclusion réciproque est immédiate.

$\text{Im}(v \circ u) = v(u(E)) = v(E_2) = E_2$ car v_{E_2} est un automorphisme de E_2 . Ainsi $v \circ u \in \Gamma$.

c) Si $\phi(u) = \phi(v)$ alors $u_{E_2} = v_{E_2}$. Or $u_{E_1} = 0 = v_{E_1}$ donc les applications linéaires u et v coïncident sur des sous-espaces vectoriels supplémentaires et donc $u = v$.

d) Une application linéaire peut être définie de manière unique par ses restrictions linéaires sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Pour $w \in \text{GL}(E_2)$ considérons $u \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par $u_{E_1} = 0$ et $u_{E_2} = w$. On vérifie aisément $E_1 \subset \ker u$ et $E_2 \subset \text{Im} u$. Pour $x \in \ker u$, $x = a + b$ avec $a \in E_1$ et $b \in E_2$. La relation $u(x) = 0$ donne alors $u(a) + u(b) = 0$ c'est-à-dire $w(b) = 0$. Or $w \in \text{GL}(E_2)$ donc $b = 0$ puis $x \in E_1$. Ainsi $\ker u \subset E_1$ et finalement $\ker u = E_1$. Pour $y \in \text{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in E_1$ et $b \in E_2$. La relation $y = u(x)$ donne alors $y = u(a) + u(b) = w(b) \in E_2$. Ainsi $\text{Im} u \subset E_2$ et finalement $\text{Im} u = E_2$. On peut conclure que $u \in \Gamma$ et $\tilde{u} = w : \phi$ est surjectif.

e) φ est un morphisme bijectif : il transporte la structure de groupe existant sur $\text{GL}(E_2)$ en une structure de groupe sur (Γ, \circ) . Le neutre est l'antécédent de Id_{E_2} c'est-à-dire la projection sur E_2 parallèlement à E_1 .

Exercice 11 : [énoncé]

a) Si $e \notin H$ alors la valeur de $u(e)$ détermine entièrement un élément u de $\{u \in E^*/u(H) = \{0\}\}$. Cela permet de mettre en place un isomorphisme entre $\{u \in E^*/u(H) = \{0\}\}$ et \mathbb{K} . La dimension cherchée vaut 1.

b) Si H est stable par f alors pour tout $x \in H$, $u(f(x)) = 0$ donc $u \circ f \in \{v \in E^*/v(H) = \{0\}\}$ or u est un élément non nul de cette droite vectorielle donc $u \circ f$ est colinéaire à u . La réciproque est immédiate.

c) $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = L \neq 0$ (car u définit une équation d'hyperplan), $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ f) = LA$ donc

$$u \circ f = \lambda u \Leftrightarrow LA = \lambda L \Leftrightarrow {}^t A {}^t L = \lambda {}^t L$$

avec ${}^t L$ colonne non nulle.

d) $\text{Sp}({}^t A) = \{1, 2, -1\}$. Une base de vecteurs propres est formée des vecteurs de composantes $(-1, -1, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(-1, 0, 1)$. Les plans stables par f sont ceux d'équations $x + y - z = 0$, $y + z = 0$ et $x - z = 0$.

Exercice 12 : [énoncé]

a) On définit la matrice A et obtient ses éléments propres :

```
A:=matrix(3,3,[1,2,0,-4,3,4,2,2,-1]);
eigenvects(A);
```

La matrice A est diagonalisable et ses espaces propres sont des droites vectorielles. Puisqu'une droite vectorielle est stable si, et seulement si, elle est engendré par un vecteur propre, les droites vectorielles stables par f sont celles engendrée par $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_{-1} = (-1, 1, -2)$ et $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$.

b) Rappelons F stable par f si, et seulement si, F^\perp est stable par f^* .

On en déduit que P est stable par f si, et seulement si, $\text{Vect}(\vec{n})$ est stable par f^* i.e. \vec{n} vecteur propre de f^* . Déterminons ces derniers.

```
eigenvects(transpose(A));
```

Les plans vectoriels stables par f sont ceux de vecteurs normaux

$$n_1 = (-3, 1, 2), n_{-1} = (-1, 0, 1) \text{ et } n_3 = (-1, 1, 1)$$

c) On définit la matrice B et on détermine les éléments propres de B et de ${}^t B$.

```
B:=matrix(3,3,[0,-1,2,0,-1,0,-1,1,-3]);
eigenvects(B);
eigenvects(transpose(B));
```

Les droites vectorielles stables par g sont celles incluses dans le plan d'équation $x - y + 2z = 0$ et celle dirigée par $(-1, 0, 1)$.

Les plans vectoriels stables par g sont ceux de droite normale incluse dans le plan d'équation $x = z$ et ou dirigée par $(-1, 1, -2)$.

Exercice 13 : [énoncé]

Dans cet énoncé, le corps de base est ambigu.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

u annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme u est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E = \ker(u - \text{Id}) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}).$$

Si F est un sous-espace vectoriel stable alors posons $F_1 = F \cap \ker(u - \text{Id})$ et $F_2 = F \cap \ker(u^2 + u + \text{Id})$. Montrons $F = F_1 \oplus F_2$.

Tout $x \in F$ peut s'écrire $x = a + b$ avec $a \in \ker(u - \text{Id})$ et $b \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$.

Puisque $u(x) = a + u(b) \in F$ et $u^2(x) = a + u^2(b) \in F$, on a

$$a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \in F \text{ puis } b = x - a \in F.$$

Ainsi $a \in F_1$, $b \in F_2$ et on a donc $F \subset F_1 + F_2$.

Il est alors immédiat qu'on peut alors conclure $F = F_1 \oplus F_2$.

Puisque $F_2 \subset \ker(u^2 + u + \text{Id})$, pour $x \in F_2$ non nul $(x, u(x))$ est libre et $\text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u . Cela permet d'établir que F_2 est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme $\text{Vect}(x, u(x))$ avec $x \neq 0$, $x \in \ker(u^2 + u + \text{Id})$. Quant à F_1 , il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de $\ker(u - \text{Id})$ est stable par u .

Exercice 14 : [énoncé]

a) L'application T est évidemment linéaire et est à valeurs dans E .

Soit $g \in E$. Montrons que l'équation $Tf = g$ admet une solution unique.

Unicité : Si $Tf = g$ alors $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle linéaire $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$. Par le théorème de Cauchy ceci détermine $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ de façon unique et donc f aussi.

Existence : La dérivée de la fonction solution $y' + y = g$ vérifiant $y(0) = 0$ est solution.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par T . Notons I l'endomorphisme de E défini par $I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Puisque F est stable par T , F est aussi stable par I . L'endomorphisme induit par I sur le sous-espace vectoriel de dimension finie F admet un polynôme minimal

$$\pi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0. \text{ On a alors pour tout } f \in F \text{ l'égalité}$$

$y + a_{n-1}y' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$ en notant $y = I^n(f)$. De plus, on a les conditions initiales $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ ce qui donne $y = 0$ puis $f = 0$. Ainsi $F = \{0\}$.

Finalement, l'espace nul est le seul espace de dimension finie stable par T . Quel intérêt au « impaire » ?

Exercice 15 : [énoncé]

$0 \in \text{sp}(f^n) \Rightarrow f^n$ non injective $\Rightarrow f$ non injective $\Rightarrow 0 \in \text{sp}(f)$.

Exercice 16 : [énoncé]

$0 \in \text{sp}(f) \Leftrightarrow f$ non injectif $\Leftrightarrow f$ non surjectif.

Exercice 17 : [énoncé]

Si $\lambda \in \text{Sp}u$ alors il existe $x \neq 0$ vérifiant $u(x) = \lambda x$. En appliquant u^{-1} , on obtient $x = \lambda u^{-1}(x)$.

Puisque $x \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et on peut écrire $u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ donc $\frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}u^{-1}$. Ainsi

$\{1/\lambda/\lambda \in \text{Sp}u\} \subset \text{Sp}u^{-1}$.

L'autre inclusion s'obtient par symétrie.

Exercice 18 : [énoncé]

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$x \in E_\lambda(v) \Leftrightarrow u(a^{-1}(x)) = \lambda a^{-1}(x) \Leftrightarrow a^{-1}(x) \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow x \in a(E_\lambda(u))$.

Ainsi $E_\lambda(v) = a(E_\lambda(u))$, puis puisque a est un automorphisme, on peut affirmer $E_\lambda(v) \neq \{0\}$ si, et seulement si, $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ et donc $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(v)$.

Exercice 19 : [énoncé]

$\forall x \neq 0, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda_x x$. Montrer que $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction constante sur $E \setminus \{0\}$. Soient $x, y \neq 0$.

Si (x, y) est libre $u(x+y) = u(x) + u(y)$ donne $\lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ donc par liberté de (x, y) on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Si (x, y) est liée, $y = \mu x$ et donc $u(y) = \mu u(x) = \lambda_x \mu x = \lambda_x y$ puis $\lambda_y = \lambda_x$.

Ainsi $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction constante. En posant λ la valeur de cette constante, on a $\forall x \in E, u(x) = \lambda x$ que x soit nul ou non.

Exercice 20 : [énoncé]

a) On vérifie $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$.

Si pour tout $k \in \mathbb{N}, f^k \neq 0$ alors l'endomorphisme $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ admet une infinité de valeurs propres.

Ceci étant impossible en dimension finie, on peut affirmer que f est nilpotent.

b) $f^n = 0$ (car $\dim E = n$) et $f^{n-1} \neq 0$. Pour $x \notin \ker f^{n-1}$ et

$e' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$, on montre classiquement que e' est une base de E dans laquelle la matrice de f est telle que voulue.

$f(g(f^{n-1}(x))) = 0$ donc $g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Aussi $f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = (\lambda + k)f^{n-1}(x)$ et donc la matrice de g dans e' et triangulaire supérieure avec sur la diagonale $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1$. Ainsi

$$\text{Sp}(g) = \{\lambda, \dots, \lambda + n - 1\}$$

Soit y vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda + n - 1$.

Si $y \in \ker f^{n-1}$ alors puisque $\ker f^{n-1}$ est stable par g , $\lambda + n - 1$ est valeur propre de l'endomorphisme induit par g sur $\ker f^{n-1}$. Cela n'étant par le cas $y \notin \ker f^{n-1}$. On vérifie alors facilement que la famille $e = (f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$ résout notre problème.

Exercice 21 : [énoncé]

$$\text{a) } AM - MA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

b) 0 est valeur propre avec $E_0 = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2})$, 1 est valeur propre avec $E_1 = \text{Vect}(E_{2,1})$ et -1 est valeur propre avec $E_{-1} = \text{Vect}(E_{1,2})$.

Exercice 22 : [énoncé]

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. $D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f$ est solution de l'équation différentielle $y' = \lambda y$ i.e. f de la forme $x \mapsto C e^{\lambda x}$. Ainsi $\text{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(D) = \text{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$.

Exercice 23 : [énoncé]

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. Si $I(f) = \lambda f$ alors $I(f)$ est solution de l'équation différentielle $y = \lambda y'$. Si $\lambda = 0$ alors $I(f) = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors $I(f)$ est de la forme $x \mapsto C e^{x/\lambda}$ et puisque $I(f)$ s'annule en 0 donc $I(f) = 0$. Dans les deux cas $f = I(f)' = 0$. Ainsi $\text{Sp}(I) = \emptyset$.

Exercice 24 : [énoncé]

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$.

$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = (1+\lambda)u(n)$. Ainsi

$\Delta(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$.

Pour $\lambda \in [-2, 0]$, la suite $u(n) = (1+\lambda)^n$ est élément de E et vérifie $\Delta(u) = \lambda u$.

Pour $\lambda \notin [-2, 0]$, seule la suite nulle est bornée et satisfait

$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u_0(1+\lambda)^n$.

Ainsi $\text{Sp}(\Delta) = [-2, 0]$.

Exercice 25 : [énoncé]

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in E$. Etudions l'équation $f(u) = \lambda u$. On a

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1} \end{cases}$$

Cas $\lambda = 1$

$$f(u) = u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{n-1}$$

On en déduit que 1 est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé est formé des suites constantes.

Cas $\lambda \neq 1$

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (2\lambda - 1)u_n = u_{n-1} \end{cases}$$

Que $\lambda = 1/2$ ou non, on obtient

$$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

et donc λ n'est pas valeur propre.

Finalement

$$\text{Sp}f = \{1\}$$

Exercice 26 : [énoncé]

a) $\varphi(f)$ est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} donc continue sur \mathbb{R}^{+*} .

Puisque f est continue, f admet une primitive F et alors quand $x \rightarrow 0^+$

$$\varphi(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \rightarrow F'(0) = f(0) = 0$$

On en déduit que $\varphi(f)$ est continue en 0.

La linéarité de φ est immédiate et donc φ est un endomorphisme de E .

b) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction de E non nulle vérifiant $\varphi(f) = \lambda f$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

donc f est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie

$$(1 - \lambda)f(x) = \lambda x f'(x)$$

Le cas $\lambda = 0$ implique $f = 0$ et est donc exclu.

Pour $\lambda \neq 0$ et $x > 0$ on a

$$x f'(x) = \alpha f(x)$$

avec $\alpha = (1 - \lambda)/\lambda$ dont la résolution conduit à

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in]0, +\infty[$$

Pour $\alpha = 0$ ou $\alpha < 0$ la condition $\lim_0 f = 0$ entraîne $f = 0$ et est donc exclue.

Par contre le cas $\alpha > 0$ (correspondant à $\lambda \in]0, 1[$) conduit au vecteur propre

$$f(x) = Cx^\alpha, x \in [0, +\infty[$$

élément de E .

Exercice 27 : [énoncé]

a) $T(f)(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$ est une fonction continue (et même dérivable).

Ainsi $T : E \rightarrow E$. La linéarité de T est évidente.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.

Cas $\lambda = 0$:

on a $T(f) = 0$, en dérivant deux fois (ce qui s'avère possible) on obtient $f = 0$.

Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T .

Cas $\lambda \neq 0$:

on a $T(f) = \lambda f$. En particulier, on peut affirmer que $f(0) = 0$ car $T(f)(0) = 0$.

Le premier membre de l'équation $T(f) = \lambda f$ est dérivable donc la fonction f est dérivable et on obtient $\int_x^1 f(t) dt = \lambda f'(x)$. En particulier $f'(1) = 0$.

Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction f est deux fois dérivable et on obtient $\lambda f''(x) + f(x) = 0$.

Sous cas $\lambda > 0$:

Sachant $f(0) = 0$, on obtient par résolution de l'équation différentielle

$$f(x) = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ et la condition } f'(1) = 0 \text{ n'entraînera pas } f = 0 \text{ que si}$$

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \text{ i.e. } \lambda = \frac{1}{(k\pi)^2} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.$$

Notons qu'alors il est possible de remonter les précédents calculs et d'affirmer que

$f : x \mapsto A \sin\left(\frac{x}{k\pi}\right)$, pour $A \neq 0$, est vecteur propre associé à la valeur propre

$$\lambda = \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

Sous cas $\lambda < 0$:

Sachant $f(0) = 0$, la résolution de l'équation différentielle donne

$$f(x) = A \text{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right) \text{ et la condition } f'(1) = 0 \text{ entraîne toujours } f = 0 \text{ et donc un}$$

tel λ n'est pas valeur propre.

Exercice 28 : [énoncé]

Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 et que $f(0) = 0$, on peut écrire

$$f(t) = f'(0)t + o(t) \text{ quand } t \rightarrow 0$$

Ainsi la fonction $\varphi : t \mapsto f(t)/t$ peut être prolongée par continuité en 0 et donc l'intégrale définissant $T(f)(x)$ a un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue. De plus, $T(f)$ apparaît alors comme la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue φ , c'est donc une fonction élément de E . Enfin, la linéarité de l'application T étant immédiate, on peut affirmer que T est un endomorphisme de E .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $T(f) = \lambda f$ alors pour tout $x \in [0, +\infty[$, $T(f)(x) = \lambda f(x)$

En dérivant cette relation, on obtient pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) = \lambda x f'(x)$$

Si $\lambda = 0$ alors f est la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda \neq 0$, f est solution de l'équation différentielle $\lambda x y' = y$.

Cette dernière est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont la solution générale sur $]0, +\infty[$ est $y(x) = Cx^{1/\lambda}$.

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = Cx^{1/\lambda}$$

Or pour qu'une telle fonction puisse être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ il faut que $C = 0$ ou $1/\lambda \geq 1$.

Ainsi les valeurs propres de T sont les éléments de l'intervalle $]0, 1]$.

Inversement, soient $\lambda \in]0, 1]$ et la fonction $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda}$ prolongée par continuité en 0.

La fonction f_λ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$, s'annule en 0 et vérifie $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$ sans être la fonction nulle.

Finalement, les valeurs propres de T sont exactement les éléments de l'intervalle $]0, 1]$.

Exercice 29 : [énoncé]

L'application φ est évidemment linéaire et on vérifie en observant une simplification que φ transforme un polynôme de degré inférieur à n en un autre. L'application φ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour résoudre l'équation $\varphi(P) = \lambda P$, on recherche les solutions polynomiales de degrés inférieurs à n à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)y' - (nx + \lambda)y = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = C(x-1)^{\frac{n+\lambda}{2}}(x+1)^{\frac{n-\lambda}{2}}$$

Pour $\lambda = -n + 2k$ avec $k \in \{0, \dots, n\}$, on obtient une fonction polynomiale non nulle

$$P_\lambda(X) = C(X-1)^k(X+1)^{n-k} \text{ avec } C \neq 0$$

et donc λ est valeur propre de φ et les P_λ sont les vecteurs propres associés. Puisque $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres (et l'endomorphisme φ est diagonalisable).

Exercice 30 : [énoncé]

a) Puisque $\deg A = n + 1$, un reste de division euclidienne par A est de degré au plus n . Ainsi l'application f va de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a $BP_1 = Q_1A + f(P_1)$ et $BP_2 = Q_2A + f(P_2)$ avec $\deg f(P_1), \deg f(P_2) \leq n$.

Par combinaison linéaire on a alors

$$B(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)A + \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2) \text{ avec}$$

$$\deg(\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)) \leq n$$

On peut alors identifier le reste de la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par A et affirmer

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

Finalement f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) On définit le polynôme A

$$A := (X-1)*(X-2)*(X-3);$$

Puis l'endomorphisme f

$$f := P \rightarrow \text{rem}(X^3 * P, A, X);$$

On peut alors calculer l'image Q de $P = aX^2 + bX + c$

$$P := a * X^2 + b * X + c;$$

$$Q := f(P);$$

Enfin on détermine les éléments du noyau en résolvant le système formé par l'annulation des coefficients de Q

$$\text{solve}(\{\text{seq}(\text{coeff}(Q, X, k) = 0, k = 0..2)\}, \{a, b, c\});$$

Enfin on peut trouver les éléments propres de f en résolvant le système associé à l'équation $f(P) = \lambda P$

```
solve({seq(coeff(Q,X,k)=coeff(lambda*P,X,k),k=0..2)},{a,b,c,lambda});
```

On définit la matrice M de f dans la base $(1, X, X^2)$

```
M:=matrix(3,3,[6,36,150,-11,-60,-239,6,25,90]);
```

Puis on calcule ses éléments propres

```
with(linalg);
eigenvecs(M);
```

c) Introduisons les polynômes de Lagrange L_0, \dots, L_n associés aux réels a_0, \dots, a_n . La famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k = 0, \dots, n$

$$BL_k = Q_k A + f(L_k)$$

En évaluant cette relation en les a_j , on obtient

$$f(L_k)(a_j) = B(a_j)\delta_{j,k}$$

et donc

$$f(L_k) = B(a_k)L_k$$

La famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de diagonalisation de l'endomorphisme f . On en déduit

$$\det f = \prod_{k=1}^n B(a_k) \neq 0 \text{ et } \ker f = \{0\}$$

Les valeurs propres de f sont les $B(a_k)$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre $B(a_k)$ est

$$\text{Vect}\{L_j/j = 0, \dots, n, B(a_j) = B(a_k)\}$$

Exercice 31 : [énoncé]

On retraduit le problème en termes d'endomorphismes. Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie vérifiant $\text{rg}(u) = 1$. Soit $x \notin \ker u$. On a $\text{Vect}(x) \oplus \ker u = E$. $u(x) \in E$ donc on peut écrire $u(x) = \lambda x + y$ avec $y \in \ker u$ de sorte que $u^2(x) = \lambda u(x)$. On observe alors que u^2 et λu coïncident sur $\text{Vect}(x)$ et bien sûr sur $\ker u$ donc $u^2 = \lambda u$. De plus, pour $y \in \text{Im}(u) \setminus \{0\}$, $y = u(a)$, $u(y) = u^2(a) = \lambda u(a) = \lambda y$ donc λ est valeur propre de u .

Exercice 32 : [énoncé]

Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tels que $AX = \lambda X$.

Posons $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$. On a $x_i \neq 0$ et

$$|\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \|A\| |x_i| \text{ d'où } |\lambda| \leq \|A\|.$$

Exercice 33 : [énoncé]

a) Le vecteur $X = {}^t(1 \dots 1)$ est évidemment vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b) Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ un vecteur propre associé. Soit i_0 l'indice vérifiant

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On a $|x_{i_0}| \neq 0$ et la relation $AX = \lambda X$ donne $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$ donc

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

puis $|\lambda| \leq 1$.

c) Si de plus $|\lambda| = 1$ alors il y a égalité dans l'inégalité précédente.

L'égalité dans la deuxième inégalité entraîne $|x_j| = |x_{i_0}|$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ car les coefficients de la matrice A sont tous non nuls.

L'égalité dans la première inégalité entraîne que les complexes engagés sont positivement liés et donc qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$x_j = |x_j| e^{i\theta}$$

On en déduit $x_1 = \dots = x_n$ puis $\lambda = 1$.

Exercice 34 : [énoncé]

a) Le vecteur $X = {}^t(1 \dots 1)$ est évidemment vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b) Soient $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ un vecteur propre associé. Soit i_0 l'indice vérifiant

$$|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On a $|x_{i_0}| \neq 0$ et la relation $AX = \lambda X$ donne $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$ donc

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_{i_0}| = |x_{i_0}|$$

puis $|\lambda| \leq 1$.

c) Si de plus $|\lambda| = 1$ alors il y a égalité dans l'inégalité précédente. L'égalité dans la deuxième inégalité entraîne $|x_j| = |x_{i_0}|$ pour tout j tel que $a_{i_0,j} \neq 0$.

L'égalité dans la première inégalité entraîne que les complexes engagés sont positivement liés et donc qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,j} |x_j| e^{i\theta}$$

Ces deux propriétés donnent pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i_0,j} x_j = a_{i_0,j} |x_{i_0}| e^{i\theta}$ que $a_{i_0,j} \neq 0$ ou non.

En injectant ceci dans la relation $\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j$, on obtient $\lambda x_{i_0} = |x_{i_0}| e^{i\theta}$.

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{i_0,j} \neq 0$, $x_j = \lambda x_{i_0}$.

Posons $i_1 = j$ et reprenons la même démarche, ce qui est possible puisque $|x_{i_1}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

On définit ainsi une suite $(i_p) \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lambda x_{i_p} = x_{i_{p+1}}$.

Cette suite étant non injective, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $i_p = i_{p+q}$ ce qui donne $\lambda^q = 1$.

Exercice 35 : [énoncé]

- a) Une récurrence facile donne $A^k B - B A^k = k A^{k-1} B$.
- b) A^k est vecteur propre de l'endomorphisme considéré si, et seulement si, $A^k \neq 0$.
- c) L'endomorphisme $M \mapsto MB - BM$ opère en dimension finie, il ne peut donc avoir qu'un nombre fini de valeurs propres et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^k = 0$.

Exercice 36 : [énoncé]

Si λ est valeur propre de A alors il existe une colonne non nulle telle que $AX = \lambda X$. Pour M matrice dont toutes les colonnes sont égales à X on a $u(M) = \lambda M$. Ainsi λ est valeur propre de u . Inversement si λ est valeur propre de u , une colonne non nulle d'un vecteur propre associé à λ définit un vecteur propre associée à la valeur propre λ pour A . Ainsi λ est aussi valeur propre de A . Finalement $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$. Une matrice M appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre λ de u si, et seulement si, chaque colonne de M appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre λ de A .

Exercice 37 : [énoncé]

a) Si λ est valeur propre de A de colonne propre $X \neq 0$ alors pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les colonnes sont égales à X , on a $AM = \lambda M$ avec $M \neq 0$. Ainsi λ est aussi valeur propre de Φ_A .

Inversement, si λ est valeur propre de Φ_A d'élément propre $M \neq 0$ alors pour X colonne non nul de M , on a $AX = \lambda X$ donc λ valeur propre de A .

b) On remarque $MA = {}^t(A^t M)$. Un raisonnement semblable au précédent permet d'établir que les valeurs propres de Ψ_A sont les valeurs propres de ${}^t A$ i.e. celles de A .

Exercice 38 : [énoncé]

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^t L$.

b) $U = I + N + \dots + N^{n-1}$, $(I - N)U = I$ donc $U^{-1} = I - N$, $L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^t N$ donc $A^{-1} = U^{-1} L^{-1} = I - N - {}^t N + N^t N$.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Posons χ_n le polynôme caractéristique de

$A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$ avec $\chi_0(\lambda) = 1$ et $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$.

En écrivant $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et en posant $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2 \cos \theta)$ on a la relation :

$$f_{n+2}(\theta) + 2 \cos \theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0, f_0(\theta) = 1 \text{ et } f_1(\theta) = 2 \cos \theta - 1.$$

La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne $f_n(\theta) = \frac{\cos((n+\frac{1}{2})\theta)}{\cos \frac{\theta}{2}}$.

Ainsi, χ_n admet n racines dans $[0, 4]$ et puisque ce polynôme est de degré n il n'y en a pas ailleurs : $\text{Sp} A^{-1} \subset [0, 4]$.

Exercice 39 : [énoncé]

Notons M la matrice étudiée et supposons $n \geq 3$, les cas $n = 1$ et 2 étant immédiats.

Puisque $\text{rg} M = 2$, 0 est valeur propre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim E_0(M) = n - 2$.

Soit λ une valeur propre non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ un vecteur propre associé.

L'équation $MX = \lambda X$ fournit le système

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \dots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

On en déduit $\lambda(\lambda - 1)x_n = \lambda x_1 + \dots + \lambda x_{n-1} = (n - 1)x_n$ avec $x_n \neq 0$ car $x_n = 0$ et $\lambda \neq 0$ entraînent $X = 0$.

Par suite λ est racine de l'équation $\lambda^2 - \lambda - (n - 1) = 0$ et donc $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$.

Inversement, on justifie que ses valeurs sont valeurs propres, soit en remontant le raisonnement, soit en exploitant la diagonalisabilité de la matrice symétrique réelle M pour affirmer l'existence de n valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exercice 40 : [énoncé]

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Si la matrice A est inversible alors

$${}^t(\text{com}A) = \det(A)A^{-1}$$

Les valeurs propres de A^{-1} sont alors

$$\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$$

Les valeurs propres de $\text{com}A$, qui sont aussi celles de ${}^t(\text{com}A)$, sont alors les

$$\frac{\det A}{\lambda_1}, \dots, \frac{\det A}{\lambda_n}$$

Si $\text{rg}A \leq n - 1$ alors la comatrice de A est de rang inférieur à 1. En effet on a

$${}^t(\text{com}A)A = O_n$$

donc

$$\text{Im}A \subset \ker({}^t\text{com}A)$$

puis

$$\dim \ker(\text{com}A) = \dim \ker({}^t\text{com}A) \geq n - 1$$

et par la formule du rang

$$\text{rg}(\text{com}A) \leq 1$$

Sachant que la comatrice de A est de rang 0 ou 1, 0 est valeur propre de $\text{com}A$ de multiplicité au moins égale à $n - 1$. Puisque la trace de $\text{com}A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est égale

à la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité, la dernière valeur propre de $\text{com}A$ n'est autre

$$\text{tr}(\text{com}A)$$

Pour calculer cette dernière, considérons $A_t = A + tI_n$ avec $t > 0$. Puisque A n'est pas inversible, 0 est valeur propre de A et on peut indexer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A de sorte que $\lambda_n = 0$.

Pour t assez petit, la matrice A_t est inversible de valeurs propres

$$\lambda_1 + t, \dots, \lambda_{n-1} + t, t$$

Les valeurs propres de la comatrice de A_t sont alors

$$\frac{\det A_t}{\lambda_1 + t}, \dots, \frac{\det A_t}{\lambda_{n-1} + t}, \frac{\det A_t}{t}$$

avec

$$\det A_t = (\lambda_1 + t) \dots (\lambda_{n-1} + t)t$$

On en déduit

$$\text{tr}(\text{com}A_t) = ((\lambda_2 + t) \dots (\lambda_{n-1} + t)t) + \dots + ((\lambda_1 + t) \dots (\lambda_{n-2} + t)t) + (\lambda_1 + t) \dots (\lambda_{n-1} + t)$$

et enfin

$$\text{tr}(\text{com}A) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \text{tr}(\text{com}A_t) = \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$$

Si $\text{rg}A = n - 1$ alors 0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$ de $\text{com}A$ et l'autre valeur propre de $\text{com}A$ est le produit des valeurs propres non nulles de A .

Si $\text{rg}A \leq n - 2$ alors 0 est valeur propre au moins double de A et donc $\text{tr}(\text{com}A) = 0$. Dans ce cas, 0 est valeur propre de multiplicité n de $\text{com}A$. En fait, on peut montrer que la comatrice de A est nulle puisque tous les mineurs de A sont nuls quand $\text{rg}A \leq n - 2$.

Exercice 41 : [énoncé]

a) Commençons par charger le package linalg

```
with(linalg);
```

Définissons la matrice A_2 et calculons ses valeurs propres

```
A2:=matrix(2,2,[0,2,1,0]);
eigenvals(A2);
```

et pour obtenir les valeurs approchées

```
map(evalf,{eigenvals(A2)});
```

Procédons de même avec A_3 et A_{10}

```
A3:=matrix(3,3,[0,2,3,1,0,3,1,2,0]);
map(evalf,{eigenvals(A3)});
A10:=matrix(10,10,(i,j)->if i=j then 0 else j fi);
map(evalf,{eigenvals(A10)});
```

b) Soient λ une valeur propre de A_n et $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n)$ un vecteur propre associé.

L'équation $A_n X = \lambda X$ conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = (\lambda + 1)x_1 \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = (\lambda + 2)x_2 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = (\lambda + n)x_n \end{cases}$$

S'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda + k = 0$ alors les égalités

$$(\lambda + j)x_j = (\lambda + k)x_k$$

donne $x_j = 0$ pour tout $j \neq k$ et l'égalité

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = (\lambda + k)x_k$$

donne $x_k = 0$. Ainsi $X = 0$ et cette situation est donc à exclure.

On a donc pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda + k \neq 0$ et le système donne

$$x_j = \frac{\lambda + 1}{\lambda + j} x_1 \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n\}$$

Puisque $X \neq 0$, le coefficient x_1 est non nul et la première équation du système donne

$$\frac{\lambda + 1}{\lambda + 1} x_1 + \frac{2(\lambda + 1)}{\lambda + 2} x_1 + \dots + \frac{n(\lambda + 1)}{\lambda + n} x_1 = (\lambda + 1)x_1$$

et en simplifiant on obtient

$$\frac{1}{\lambda + 1} + \frac{2}{\lambda + 2} + \dots + \frac{n}{\lambda + n} = 1$$

c) Inversement, si λ vérifie l'équation

$$\frac{1}{\lambda + 1} + \frac{2}{\lambda + 2} + \dots + \frac{n}{\lambda + n} = 1$$

alors en posant

$$X = {}^t \left(\frac{1}{\lambda + 1} \quad \frac{1}{\lambda + 2} \quad \dots \quad \frac{1}{\lambda + n} \right)$$

on obtient une colonne $X \neq 0$ vérifiant $A_n X = \lambda X$.

Ainsi les valeurs propres de A_n sont exactement les racines de l'équation

$$\frac{1}{\lambda + 1} + \frac{2}{\lambda + 2} + \dots + \frac{n}{\lambda + n} = 1$$

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x + 1} + \dots + \frac{1}{x + n}$$

La fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles

$$]-\infty, -n[;]-n, -(n-1)[; \dots;]-2, -1[;]-1, +\infty[$$

et les limites de f aux extrémités de ces intervalles sont aisées. On en déduit que A_n admet une valeur propre dans chacun des intervalles

$$]-n, -(n-1)[; \dots;]-2, -1[;]-1, +\infty[$$

Notons que de plus la somme des valeurs propres de A_n étant égale à $\text{tr} A_n = 0$, l'unique valeur propre positive est comprise entre

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } \sum_{k=2}^n k = \frac{(n-1)(n+1)}{2}$$

d) Le terme x_n est caractérisé par

$$\frac{1}{x_n + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + n} = 1 \text{ et } x_n \in]-2, -1[$$

Si $x_{n+1} \leq x_n$ alors

$$1 = \frac{1}{x_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{x_{n+1} + n + 1} > \frac{1}{x_n + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + n} \geq \frac{1}{x_n + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + n} = 1$$

ce qui est absurde.

On en déduit que $x_n < x_{n+1}$ et donc que la suite (x_n) est strictement croissante.

e) La suite (x_n) est croissante et majorée par -1 donc cette suite converge vers $\ell \leq -1$.

Si $\ell < -1$ alors la relation

$$\frac{1}{x_n + 1} + \dots + \frac{1}{x_n + n} = 1$$

donne

$$1 \geq \frac{1}{\ell+1} + \dots + \frac{1}{\ell+n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or la série numérique $\sum \frac{1}{\ell+k}$ est divergente et donc ce qui précède est absurde.

On en déduit que la suite (x_n) croît vers -1 .

On peut donc écrire $x_n = -1 - y_n$ avec $y_n \rightarrow 0^+$, $y_n \in]0, 1[$ et

$$-\frac{1}{y_n} + \frac{1}{1-y_n} + \dots + \frac{1}{(n-1)-y_n} = 1$$

On en déduit

$$\frac{1}{y_n} = \frac{y_n}{1-y_n} + \frac{1}{2-y_n} + \dots + \frac{1}{(n-1)-y_n}$$

Puisque

$$\frac{y_n}{1-y_n} \rightarrow 0$$

et

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{2-y_n} + \dots + \frac{1}{(n-1)-y_n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2}$$

avec les termes encadrant tout deux équivalents à $\ln n$.

On en déduit

$$\frac{1}{y_n} \sim \ln n$$

puis

$$x_n = -1 - \frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Exercice 42 : [\[énoncé\]](#)

a) Par le calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 0 \\ \vdots & & 1 \\ 1 & & \vdots \\ 0 & (0) & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Puisque A et A^2 ne possèdent que deux colonnes non nulles et que celles-ci sont visiblement indépendantes, on a $\text{rg} A = \text{rg} A^2 = 2$.

b) On a $\text{rg} f = \text{rg} f^2$ donc $\dim \ker f = \dim \ker f^2$. Or $\ker f \subset \ker f^2$ donc $\ker f = \ker f^2$.

Pour $x \in \ker f \cap \text{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et on a $f(x) = 0$ donc $a \in \ker f^2 = \ker f$ puis $x = 0$.

On en déduit $\ker f \cap \text{Im} f = \{0_E\}$ et un argument de dimension permet d'affirmer que $\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}^n$.

c) Une base adaptée à la décomposition $\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}^n$ permet de justifier que la matrice A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 & \\ & & & B \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Puisqu'on a alors $\text{rg} A = \text{rg} B = 2$, on peut affirmer que la matrice B est inversible.

d) $\text{tr} B = \text{tr} A = 0$ et $\text{tr} B^2 = \text{tr} A^2 = 2$.

Soient λ et μ les deux valeurs propres complexes de la matrice B . On a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \end{cases}$$

On en déduit

$$\{\lambda, \mu\} = \{1, -1\}$$

Ainsi

$$\text{Sp} B = \{1, -1\} \text{ et } \text{Sp} A = \{1, 0, -1\}$$

e) Par calcul de rang

$$\dim E_0(A) = \dim \ker A = n - 2$$

On a aussi

$$\dim E_1(A) = \dim E_1(B) = 1 \text{ et } \dim E_{-1}(A) = 1$$

donc la matrice A est diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n .

Exercice 43 : [\[énoncé\]](#)

a) Si $B = P^{-1}AP$ alors $\chi_B = \det(P^{-1}AP - P^{-1}XP) = \chi_A$.

b) Inversement $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont même polynôme caractéristique.

Exercice 44 : [énoncé]

Soit G un supplémentaire de F . Dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs et en calculant le polynômes caractéristique de u par cette matrice on obtient immédiatement la propriété demandée.

Exercice 45 : [énoncé]

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1} - xI) = \det A^{-1} \det(I - xA) = \frac{(-x)^n}{\det A} \det(A - \frac{1}{x}I) \text{ donc}$$

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-x)^n}{\chi_A(0)} \chi_A(1/x).$$

Exercice 46 : [énoncé]

a) Pour $x \in \mathbb{C}$,
 $\det(AB - xI_n) = \det A \det(B - xA^{-1}) = \det(B - xA^{-1}) \det A = \det(BA - xI_n)$
 donc $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.
 b) $t \mapsto \det(A + tI_n)$ est une fonction polynomiale en t donc ses annulations sont isolées et donc pour tout $t > 0$ suffisamment petit $A + tI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Comme vu ci-dessus, pour $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_{(A+tI_n)B}(x) = \chi_{B(A+tI_n)}(x)$$

Les applications $t \mapsto \chi_{(A+tI_n)B}(x)$ et $t \mapsto \chi_{B(A+tI_n)}(x)$ sont polynomiales en t donc continues et en passant à la limite quand $t \rightarrow 0$ on obtient $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

Exercice 47 : [énoncé]

Il est bien connu que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_{MN} = \chi_{NM}$$

On en déduit

$$\chi_{(AB)^p} = \chi_{[A(BA)^{p-1}]B} = \chi_{B[A(BA)^{p-1}]} = \chi_{(BA)^p}$$

Exercice 48 : [énoncé]

Il est classique d'établir $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en commençant par établir le résultat pour A inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

Exercice 49 : [énoncé]

On a

$$\chi_{A\bar{A}}(X) = \det(A\bar{A} - XI_n)$$

donc en conjuguant

$$\overline{\chi_{A\bar{A}}}(X) = \det(\bar{A}A - XI_n) = \chi_{\bar{A}A}(X)$$

Or il est bien connu que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

On obtient donc

$$\overline{\chi_{A\bar{A}}} = \chi_{A\bar{A}}$$

et par conséquent

$$\chi_{A\bar{A}} \in \mathbb{R}[X]$$

Exercice 50 : [énoncé]

D'une part

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & O_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - \lambda I_n & A \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{pmatrix} -I_n & O_{n,p} \\ B & -\lambda I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & -A \\ O_{p,n} & BA - \lambda I_p \end{pmatrix}$$

En passant au déterminant, on obtient

$$\det M \times (-1)^n = \chi_{AB}(\lambda) \text{ et } (-1)^n (-\lambda)^p \det M = (-\lambda)^n \chi_{BA}(\lambda)$$

et on en déduit

$$(-\lambda)^p \chi_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^n \chi_{BA}(\lambda)$$

Exercice 51 : [énoncé]

Dans le cas où $A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la propriété est immédiate en écrivant

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \text{ avec } C \text{ bloc carré de taille } r.$$

Dans le cas général, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec $r = \text{rg} A$ et P, Q inversibles.

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^q \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = X^q \chi_{J_rPBQ}(X) \text{ donc}$$

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{PBQJ_r}(X) = X^p \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p \chi_{BA}(X).$$

Exercice 52 : [énoncé]

a) Oui un tel polynôme existe, il suffit de se référer aux matrices compagnons. Notons qu'il est entendu, qu'ici, le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est définie par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

b) Il existe une matrice A dont le polynôme caractéristique est P . Celle-ci est

semblable à une matrice triangulaire de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et donc A^q

est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$. Ainsi le polynôme caractéristique de A^q est P_q

et puisque A^q est à coefficients entiers, P_q l'est aussi.

c) Compte tenu des relations coefficients-racines d'un polynôme scindé, on peut majorer les coefficients de P et affirmer que, pour un degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes P possibles. Considérons un tel polynôme.

L'application $q \in \mathbb{N}^* \mapsto P_q$ n'est pas injective compte tenu des résultats précédents, il existe donc $q < r$ tel que $P_q = P_r$. Ainsi, il existe une permutation σ de \mathbb{N}_n vérifiant : $\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i^q = \lambda_{\sigma(i)}^r$. A l'aide d'une décomposition en cycles de σ , on peut affirmer qu'il existe une puissance de σ égale à l'identité et donc conclure que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ il existe $q' > q$ tel que $\lambda_i^q = \lambda_i^{q'}$. On peut alors affirmer que λ_i est nul ou bien une racine de l'unité.

Exercice 53 : [énoncé]

a) $\text{Sp}B = \text{Sp}^t B$ car $\chi_B = \chi^t B$.

b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A(CX) = \lambda(CX)$ donc $CX \in \ker(A - \lambda I_n)$.

c) Soit X et Y des vecteurs propres de A et ${}^t B$ associé à la valeur propre λ . La matrice $C = X^t Y$ est solution.

d) On peut écrire $C = QJ_r P$ avec P, Q inversibles. La relation $AC = CB$ donne $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$.

En écrivant les matrices $Q^{-1} A Q$ et $P B P^{-1}$ par blocs, l'égalité $Q^{-1} A Q J_r = J_r P B P^{-1}$ impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que $\chi_A = \chi_{Q^{-1} A Q}$ et $\chi_B = \chi_{P B P^{-1}}$ ont un facteur commun de degré $\geq r$, à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position $(1,1)$.

e) La réciproque est assurément fautive en toute généralité. Pour $r = n$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

Exercice 54 : [énoncé]

Par contraposition, montrons $\det A < 0 \Rightarrow \text{Sp}A \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset$.

On a

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + \dots + \det A$$

Si $\det A < 0$ alors puisque $\lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_A(t) = +\infty$ et sachant la fonction $t \mapsto \chi_A(t)$ continue, il existe $\lambda \in]0, +\infty[$ racine de χ_A et donc valeur propre de A .

On peut aussi établir le résultat en observant que le déterminant de A est le produit des valeurs propres complexes de A comptées avec multiplicité. Parmi celles-ci, celles qui sont réelles sont positives et celles qui sont complexes non réelles, sont deux à deux conjuguées. Le produit est donc positif.

Exercice 55 : [énoncé]

On peut écrire

$$\chi_A(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

On a alors

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, B - \lambda_k I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

ce qui donne

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k \notin \text{Sp}B$$

et on peut ainsi affirmer

$$\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset$$

Exercice 56 : [énoncé]



Dans une base adaptée au noyau, la matrice de est

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & \vdots & & \vdots \\ * & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^{n-2} (X^2 - (a+d)X + ad - bc)$$

Or

$$\text{tr} f = a + d \text{ et } \text{tr} f^2 = a^2 + 2bc + d^2$$

donc

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^{n-2} \left(X^2 - \text{tr}(f)X + \frac{(\text{tr} f)^2 - \text{tr}(f^2)}{2} \right)$$

Exercice 57 : [énoncé]

En développant selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}_{[n]} = (-1)^{n+1} a_0 - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en reprenant le processus on parvient à

$$(-1)^{n+1} (a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_{n-1} \lambda^{n-1} - \lambda^n)$$

On peut aussi résoudre le problème via l'opération élémentaire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \cdots + \lambda^{n-1} C_n.$$

Exercice 58 : [énoncé]

a) $P_n(x)$ est un déterminant tri-diagonal. On développe selon la première colonne en un déterminant triangulaire et en un second déterminant qu'on développe selon la première ligne.

$$P_1(x) = -x \text{ et } P_2(x) = x^2 - 1.$$

b) La suite $(P_n(-2 \cos \alpha))$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On introduit l'équation caractéristique associée dont les racines permettent d'exprimer le terme général de $(P_n(x))$ à l'aide de coefficients inconnus déterminés par les valeurs $n = 1$ et $n = 2$.

c) Les $x_k = -2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$ sont racines distinctes de $P_n(x)$. $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Exercice 59 : [énoncé]

a) En factorisant sur la i ème colonne

$$P(a_i) = a_i \begin{vmatrix} a_i & 1 & a_n \\ a_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_n \\ a_1 & 1 & a_i \end{vmatrix}$$

En retranchant la i ème ligne à chacune des autres

$$P(a_i) = a_i \begin{vmatrix} a_i - a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a_i - a_n \end{vmatrix}$$

et donc

$$P(a_i) = a_i \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$

b) En utilisant la formule des déterminants

$$P(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + x \delta_{\sigma(i),i})$$

Si $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}_n}$ alors $\prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + x \delta_{\sigma(i),i}) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} + x)$ est une expression polynomiale unitaire de degré n .

Si $\sigma \neq \text{Id}_{\mathbb{N}_n}$ alors $\prod_{i=1}^n (a_{\sigma(i),i} + x \delta_{\sigma(i),i}) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} + x)$ est une expression polynomiale de degré strictement inférieure à n .

On peut donc affirmer que P est une fonction polynomiale unitaire de degré exactement n .

c) Puisque les a_i sont deux à deux distincts

$$\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^n (X - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

avec

$$\lambda_i = \frac{P(a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} = a_i$$

d) On a $\det(A + I_n) = P(1)$.

Si l'un des a_i vaut 1, il suffit de reprendre la valeur de $P(a_i)$.

Sinon, par la décomposition précédente

$$\frac{P(1)}{\prod_{i=1}^n (1 - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_i}$$

et donc

$$\det(A + I_n) = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - a_i}\right) \prod_{i=1}^n (1 - a_i)$$

Exercice 60 : [énoncé]

- a) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f admet un polynôme minimal qui admet au moins une racine dans \mathbb{C} qui est alors valeur propre de f .
 b) Si λ est valeurs propre de l'endomorphisme considéré alors il existe un polynôme P non nul tel que $XP(X) = (1 + \lambda)P(X)$ ce qui est impossible pour des raisons de degré.

Exercice 61 : [énoncé]

On retraduit le problème en terme d'endomorphismes. Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Tout endomorphisme sur un \mathbb{C} -espace vectoriel admet au moins une valeur propre. Soit λ une valeur propre de u . $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel stable par v (car $u \circ v = v \circ u$) et l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ admet au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à celle-ci est vecteur propre commun à u et v .

Exercice 62 : [énoncé]

Si A et B ont λ pour valeur propre commune alors puisque A et tA ont les mêmes valeurs propres, il existe des colonnes $X, Y \neq 0$ vérifiant ${}^tAX = \lambda X$ et $BY = \lambda Y$. Posons alors $U = Y^tX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$.

On a $BU = \lambda Y^tX$ et $UA = Y^t({}^tAX) = \lambda Y^tX$ donc $UA = BU$.

Inversement, supposons qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle vérifiant $UA = BU$. On peut écrire $U = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et $r = \text{rg}U > 0$. L'égalité $UA = BU$ entraîne alors $J_rA' = B'J_r$ avec $A' = PAP^{-1}$ et $B' = Q^{-1}BQ$. Puisque semblables, $\text{Sp}A' = \text{Sp}A$ et $\text{Sp}B' = \text{Sp}B$. En raisonnant par blocs, l'égalité

$$J_rA' = B'J_r \text{ entraîne } A' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix} \text{ et } B' = \begin{pmatrix} M & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \text{ avec } M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}).$$

Ces formes matricielles $\text{Sp}M \subset \text{Sp}A'$ et $\text{Sp}M \subset \text{Sp}B'$. Or $\text{Sp}M \neq \emptyset$ (cadre complexe) donc $\text{Sp}A \cap \text{Sp}B \neq \emptyset$.

Exercice 63 : [énoncé]

- a) Puisque $u \circ v = v \circ u$ les sous-espaces propres de u sont stables par v . Puisque E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, u admet une valeur propre et le sous-espace propre

associé est stable par v . L'endomorphisme induit par v sur celui-ci admet une valeur propre et ceci assure l'existence d'un vecteur propre commun à u et v .

b) $u \circ v - v \circ u = au$.

Si u est inversible alors $u \circ v \circ u^{-1} - v = a\text{Id}_E$ et donc

$$\text{tr}(u \circ v \circ u^{-1}) - \text{tr}v = a \dim E.$$

Or $\text{tr}(u \circ v \circ u^{-1}) = \text{tr}v$ ce qui entraîne une absurdité.

On en déduit que u est non inversible.

v admet une valeur propre λ et si x est vecteur propre associé, la relation précédente donne

$$v(u(x)) = (\lambda - a)u(x)$$

Si u est inversible alors $\lambda - a$ est valeur propre de v et en reprenant ce schéma, on obtient $\lambda - na$ valeurs propres de v pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est absurde car v ne possède qu'un nombre fini de valeurs propres et donc u n'est pas inversible. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nau^n$$

L'endomorphisme $\varphi : w \mapsto w \circ v - v \circ w$ n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres car opère en dimension finie. Si u n'est pas nilpotent alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, na est valeur propre de φ . C'est absurde et donc u est nilpotent.

Enfin, soit $x \in \ker u$. On a $u(v(x)) = v(u(x)) + au(x) = 0$ donc $v(x) \in \ker u$. Par suite $\ker u \neq \{0\}$ est stable par v et un vecteur propre de l'endomorphisme induit est vecteur propre commun à u et v .

c) $u \circ v - v \circ u = au + bv$.

Si $a = 0$ il suffit de transposer l'étude précédente.

Si $a \neq 0$, considérons $w = au + bv$.

On a

$$(au + bv) \circ v - v \circ (au + bv) = a(u \circ v - v \circ u) = a(au + bv)$$

Par l'étude qui précède, $au + bv$ et v ont un vecteur propre en commun puis u et v ont un vecteur propre en commun.

Exercice 64 : [énoncé]

Cas $a = b = 0$

Les endomorphismes f et g commutent donc les sous-espaces propres de l'un sont stables pour l'autre. Puisque le corps de base est \mathbb{C} , l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ . L'espace $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ est stable par g donc on peut introduire l'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda(f)$ et ce dernier admet aussi au moins une valeur propre. Un vecteur propre associé à cette valeur propre de g est aussi un vecteur propre de f car élément non nul de $E_\lambda(f)$. Ainsi f et g ont un vecteur propre commun.

Cas $a = 0$ et $b \neq 0$

Par récurrence, on obtient $f \circ g^n - g^n \circ f = nbg^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ u - u \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ or $\dim \mathcal{L}(E) < +\infty$ donc cet endomorphisme n'admet qu'un nombre fini de valeur propre. Cependant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n \neq \tilde{0}$, le scalaire nb est valeur propre de cet endomorphisme, on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^n = \tilde{0}$ et en particulier $\ker g \neq \{0\}$.

On vérifie aisément que $\ker g$ est stable par f et un vecteur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\ker g$ est alors vecteur propre commun à f et g .

Cas $b = 0$ et $a \neq 0$

Semblable

Cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$

On a

$$f \circ (af + bg) - (af + bg) \circ f = b(f \circ g - g \circ f) = b(af + bg)$$

Par l'étude qui précède, f et $af + bg$ admettent un vecteur propre commun et celui-ci est alors vecteur propre commun à f et g .

Exercice 65 : [énoncé]

a) $\chi_A(X) = (X - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$ de racines $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.

Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ alors A possède deux valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ alors A est diagonale.

b) Si $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ alors A ne possède pas de valeurs propres (réelles) donc n'est pas diagonalisable.

Si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ alors A est diagonale.

c) $\chi_B(X) = (X - \cos \alpha)(X + \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$ de racines ± 1 donc B est diagonalisable.

Exercice 66 : [énoncé]

$\chi_M(x) = -x^3 + x(ab + bc + ca)$. Posons $\delta = ab + bc + ca$.

Cas complexe.

Si $\delta \neq 0$ alors M est diagonalisable car χ_M admet trois racines distinctes.

Si $\delta = 0$ alors 0 est seule valeur propre et par suite M est diagonalisable si, et seulement si M est semblable à la matrice nulle ce qui n'est le cas que si $a = b = c = 0$.

Cas réel.

Si $\delta > 0$ alors M est diagonalisable.

Si $\delta = 0$ alors M est diagonalisable si, et seulement si, $a = b = c = 0$.

Si $\delta < 0$ alors M n'est pas diagonalisable.

Exercice 67 : [énoncé]

$E_{i,i}$ est diagonale donc diagonalisable.

Pour $i \neq j$, $\chi_{E_{i,j}}(X) = (-1)^n X^n$ donc seul 0 est valeur propre. Par suite si $E_{i,j}$ est diagonalisable alors $E_{i,j} = 0$ ce qui est incorrect. Conclusion $E_{i,j}$ diagonalisable si, et seulement si, $i = j$.

Exercice 68 : [énoncé]

a) A ne possède que deux colonnes différentes donc $\text{rg}(A) \leq 2$.

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$ donc $\text{rg}(A) = 2$. Par le théorème du rang

$\dim \ker A = 2n - 2$ donc 0 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé est $2n - 2$.

b) Les vecteurs ${}^t(1 \dots 1)$ et ${}^t(1 \ -1 \dots 1 \ -1)$ sont vecteurs propres associées aux valeurs propres non nulles $n(a + b)$ et $n(a - b)$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $2n$ donc A est diagonalisable.

Exercice 69 : [énoncé]

Etudions la première matrice que nous noterons A .

Celle-ci est de rang 2 et on peut facilement déterminer une base de son noyau.

En posant le système $AX = \lambda X$ avec $\lambda \neq 0$, on obtient une solution non nulle sous réserve que

$$\lambda^2 - \lambda + (n - 1) = 0$$

En notant λ_1 et λ_2 les deux racines de cette équation, on obtient $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 & 1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0) & & 1 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

En reprenant la même démarche avec la seconde matrice que nous noterons B , on obtient $B = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & & (0) & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

où λ_1, λ_2 sont les deux racines de

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$$

Exercice 70 : [énoncé]

1ère méthode :

Notons $\chi_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de cette matrice de taille n .

Par développement du déterminant selon la dernière colonne on obtient

$$\chi_n(\lambda) = (1-\lambda)\chi_{n-1}(\lambda) - (1-\lambda)^{n-2}$$

En étudiant les premiers termes de cette suite, on conjecture

$$\chi_n(\lambda) = (1-\lambda)^n - (n-1)(1-\lambda)^{n-2}$$

que l'on vérifie aisément par récurrence. Les valeurs propres de la matrice sont donc 1 (pour $n \geq 3$) et les deux racines $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$.

2ème méthode :

Notons A la matrice étudiée. L'équation $AX = \lambda X$ donne le système

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = (\lambda - 1)x_2 \\ \vdots \\ x_1 = (\lambda - 1)x_n \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$, on peut obtenir une solution non nulle avec les conditions $x_1 = 0$ et $x_2 + \dots + x_n = 0$.

Pour $\lambda \neq 1$, le système devient

$$\begin{cases} (n-1)x_1 = (\lambda - 1)^2 x_1 \\ x_2 = x_1/(\lambda - 1) \\ \vdots \\ x_n = x_1/(\lambda - 1) \end{cases}$$

Pour $x_1 = 0$, la solution du système est nulle.

Pour $x_1 \neq 0$, on peut former une solution non nulle à condition que $(\lambda - 1)^2 = n - 1$.

Exercice 71 : [énoncé]

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + (n-1)b, a-b, \dots, a-b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

$B = Q\Delta Q^{-1}$ avec

Si n est impair : $\Delta = \text{diag}(a + (n-1)b, b-a, \dots, b-a, a-b, \dots, a-b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & (0) \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -2 & \dots & -2 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Si n pair : $\Delta = \text{diag}(a + (n-1)b, b-a, \dots, b-a, a-b, \dots, a-b)$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & (0) \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & -1 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & (0) \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Exercice 72 : [énoncé]

a) $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ avec $D(a, b) = \text{diag}((a+b)^2, (a-b)^2, a^2 - b^2, a^2 - b^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M(a, b)^n \rightarrow 0$ si, et seulement si, $|a+b| < 1$, $|a-b| < 1$ et $|a^2 - b^2| < 1$.

Or $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.

L'étude graphique est alors simple.

Exercice 73 : [énoncé]

a) On charge le package linalg et on définit la matrice étudiée

```
with(linalg):
```

```
A:=matrix(4,4,[0,0,0,d,0,0,c,0,0,b,0,0,a,0,0,0]);
```

On détermine ses éléments propres

```
eigenvects(A);
```

Dans le cas où a, b, c, d sont non nuls, on obtient quatre vecteurs propres non colinéaires et la matrice est diagonalisable.

Si $a = 0$ et $d \neq 0$

```
A:=matrix(4,4,[0,0,0,d,0,0,c,0,0,b,0,0,0,0,0,0]);
```

```
eigenvects(A);
```

On obtient 0 valeur propre double et le sous-espace propre correspondant est de dimension 1.

La matrice A n'est alors pas diagonalisable.

Si $b = 0$ et $c \neq 0$, ou si $c = 0$ et $b \neq 0$, ou encore si $d = 0$ et $a \neq 0$, c'est semblable.

Dans les cas complémentaires (par exemple $a = d = 0$ et $b, c \neq 0$), la matrice est diagonalisable.

b) Si u est diagonalisable alors les endomorphismes u_{F_1}, \dots, u_{F_p} le sont aussi (car sont annulé par un polynôme scindé simple annulant u).

Inversement, si les endomorphismes u_{F_1}, \dots, u_{F_p} sont diagonalisables alors, sachant $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$, on peut former une base de E diagonalisant u en accolant des bases des F_i diagonalisant u_{F_i} .

Finalement, u est diagonalisable si, et seulement si, les endomorphismes

u_{F_1}, \dots, u_{F_p} le sont.

c) Soient (e_1, \dots, e_{2n}) la base canonique de \mathbb{C}^{2n} et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{2n})$ de matrice A dans cette base.

Les espaces F_1, \dots, F_n définis par $F_i = \text{Vect}(e_i, e_{2n+1-i})$ sont stables par u et vérifient $\mathbb{C}^{2n} = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

Par ce qui précède, u est diagonalisable si, et seulement si, les endomorphismes u_{F_1}, \dots, u_{F_n} le sont.

Or la matrice de u_{F_i} dans la base (e_i, e_{2n+1-i}) est

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{2n+1-i} \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$$

et cette dernière est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si,

$$a_i a_{2n+1-i} \neq 0 \text{ ou } a_i = a_{2n+1-i} = 0$$

On peut alors affirmer que A est diagonalisable si, et seulement si,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i a_{2n+1-i} \neq 0 \text{ ou } a_i = a_{2n+1-i} = 0$$

d) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si, et seulement si,

$$ab > 0 \text{ ou } a = b = 0$$

En adaptant l'étude qui précède, on obtient que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si, et seulement si,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i a_{2n+1-i} > 0 \text{ ou } a_i = a_{2n+1-i} = 0$$

Exercice 74 : [énoncé]

La matrice A est la matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de l'endomorphisme

$$u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto nXP + (1 - X^2)P'$$

Considérons alors la base de polynômes étagés $(1, (X + 1), \dots, (X + 1)^n)$. On a

$$u((X + 1)^k) = nX(X + 1)^k + k(1 - X)(X + 1)^k$$

qui se réécrit

$$u((X + 1)^k) = (n - k)(X + 1)^{k+1} + (k - 2n)(X + 1)^k$$

La matrice de l'endomorphisme u dans la base $(1, (X + 1), \dots, (X + 1)^n)$ est triangulaire inférieure de coefficients diagonaux

$$k - 2n \text{ avec } k \in \{0, \dots, n\}$$

On en déduit χ_A et on observe que A possède $n + 1$ valeurs propres distinctes. La matrice A est donc diagonalisable.

Exercice 75 : [énoncé]

Cas $a = b = 0$ la résolution est immédiate.

Cas $a = 0$ et $b \neq 0$, la matrice M_n est triangulaire supérieure stricte non nulle, elle n'est pas diagonalisable.

Cas $a \neq 0$ et $b = 0$, idem.

Cas $a = b$

$$\chi_{M_n}(X) = (-1)^n (X - (n - 1)a)(X + a)^{n-1}$$

avec

$$E_{(n-1)a} = \text{Vect}(1, \dots, 1)$$

et

$$E_{-a} : x_1 + \dots + x_n = 0$$

La matrice M_n est donc diagonalisable et il est aisé de former une base de vecteurs propres.

Cas $a \neq b$ et $ab \neq 0$

Après calculs (non triviaux)

$$\chi_{M_n}(X) = (-1)^n \frac{b(X + a)^n - a(X + b)^n}{b - a}$$

Les racines de ce polynôme sont les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\left(\frac{z + a}{z + b}\right)^n = \frac{a}{b}$$

Il y en a exactement n s'exprimant en fonction des racines n ème de l'unité.

On en déduit que M_n est diagonalisable.

Soit λ une valeur propre de M_n et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

L'équation $M_n x = \lambda x$ équivaut au système

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + bx_2 + \dots + bx_n = 0 \\ ax_1 - \lambda x_2 + \dots + bx_n = 0 \\ \vdots \\ ax_1 + \dots + ax_{n-1} - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

En retranchant à chaque équation la précédente, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + bx_2 + \dots + bx_n = 0 \\ (a + \lambda)x_1 + (b + \lambda)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (a + \lambda)x_{n-1} - (b + \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Puisque ce système est de rang $n - 1$ (car λ est valeur propre simple) et puisque les $n - 1$ dernières équations sont visiblement indépendantes, ce système équivaut encore à

$$\begin{cases} (a + \lambda)x_1 + (b + \lambda)x_2 = 0 \\ \vdots \\ (a + \lambda)x_{n-1} - (b + \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce dernier est immédiate. On obtient pour vecteur propre $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec

$$x_k = \left(\frac{a + \lambda}{b + \lambda}\right)^k$$

Exercice 76 : [énoncé]

a) En développant selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}_{[n]} = (-1)^{n+1} a_0 - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en reprenant le processus on parvient à

$$(-1)^{n+1} (a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} - \lambda^n)$$

On peut aussi retrouver ce résultat via l'opération élémentaire :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \dots + \lambda^{n-1} C_n.$$

On en déduit

$$\chi_M(X) = (-1)^n P(X)$$

b) Si λ est racine du polynôme P alors λ est valeur propre de M . Après résolution, le sous-espace propre associé est engendré par la colonne

$${}^t (1 \quad \lambda \quad \dots \quad \lambda^{n-1})$$

c) Puisque les sous-espaces propres sont de dimension 1, la matrice M est diagonalisable si, et seulement si, elle possède exactement n valeurs propres ce qui revient à dire que le polynôme P est scindé à racines simples.

Exercice 77 : [énoncé]

Via un changement de bases réalisé de sorte que les premiers vecteurs soient dans le noyau de A , on peut écrire $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} O_{n-1} & \star \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \text{tr}A$.

Si $\lambda \neq 0$ alors λ est valeur propre de A ce qui permet de diagonaliser A .

Si A est diagonalisable, sachant que A n'est pas nulle, $\lambda \neq 0$.

Exercice 78 : [énoncé]

Posons $M = X^tY$. On a $M^2 = X(^tYX)^tY$. Or $\alpha = ^tYX$ est un scalaire donc $M^2 = \alpha X^tY = \alpha M$.

Si $\alpha \neq 0$ alors M annule le polynôme scindé simple $X(X - \alpha)$ et donc M est diagonalisable.

Si $\alpha = 0$ alors M annule le polynôme X^2 et donc 0 est la seule valeur propre possible. Si M est diagonalisable alors M est semblable à la matrice nulle et donc $M = O_n$. Ceci est exclu car on suppose les colonnes X et Y non nulles.

Au final M est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha \neq 0$.

Notons que $\alpha = \text{tr}(^tYX) = \text{tr}(X^tY) = \text{tr}M$ et que M est une matrice de rang 1.

On peut montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 79 : [énoncé]

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{K}^n et f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n dont la matrice dans \mathcal{B} est J .

Posons $\varepsilon_1 = e_1 + \dots + e_n$, de sorte que $f(\varepsilon_1) = n\varepsilon_1$.

Puisque $\text{rg}f = \text{rg}J = 1$, on peut introduire $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ base du noyau de f .

Il est alors clair que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de \mathbb{K}^n et que la matrice de f dans celle-ci est diagonale.

Exercice 80 : [énoncé]

En posant $M = (a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$, on vérifie $M^2 = \lambda M$ avec $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$.

Si $\lambda \neq 0$ alors M annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable.

Si $\lambda = 0$ alors $M^2 = 0$ et donc M est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0$ ce qui revient à $(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Exercice 81 : [énoncé]

Si A est diagonalisable alors il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = D$ diagonale. En transposant, ${}^tP^tA^t(P^{-1}) = D$ c'est-à-dire $Q^tAQ^{-1} = D$ avec $Q = {}^tP$ inversible d'inverse $Q^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

Exercice 82 : [énoncé]

Il existe des matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ telles que

$$AB = PDP^{-1}$$

On a alors

$$A(BA)A^{-1} = PDP^{-1}$$

puis

$$BA = (A^{-1}P)D(P^{-1}A) = (A^{-1}P)D(P^{-1}A)^{-1}$$

Exercice 83 : [énoncé]

Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimension p et q d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ une base adaptée à la supplémentarité de F_1 et F_2 et f_1, f_2 et f les endomorphismes de F_1, F_2 et E déterminés par $\text{Mat}(f_1, \mathcal{B}_1) = A_1, \text{Mat}(f_2, \mathcal{B}_2) = A_2$ et $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = A$. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $E_\lambda(f) = E_\lambda(f_1) \oplus E_\lambda(f_2)$. En caractérisant la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres, on conclut à l'équivalence voulue.

Exercice 84 : [énoncé]

a) $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$

$$BX = \lambda X \Leftrightarrow X_2 = \lambda X_1 \text{ et } AX_1 = \lambda X_2 \Leftrightarrow X_2 = \lambda X_1 \text{ et } AX_1 = \lambda^2 X_1.$$

Par conséquent λ est valeur propre de B si, et seulement si, λ^2 est valeur propre de A .

b) Si $A = O_n$ alors A est diagonalisable mais pas B .

En effet, 0 est la seule valeur propre de B alors que $B \neq O_n$.

Exercice 85 : [énoncé]

a) On vérifie

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & -D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

b) On observe

$$\begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ O_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & D \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E \\ O_n & B \end{pmatrix}$$

avec $E = AD + C - DB$.

Pour conclure, montrons qu'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $DB - AD = C$.

Considérons pour cela l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\varphi(M) = MB - AM$$

Pour $M \in \ker \varphi$, on a $MB = AM$.

Pour tout X vecteur propre de B associé à une valeur propre λ , on a

$$AMX = MBX = \lambda MX$$

Puisque λ est valeur propre de B , λ n'est pas valeur propre de A et donc

$$MX = O_{n,1}.$$

Puisqu'il existe une base de vecteurs propres de B et puisque chacun annule M ,

on a $M = O_n$.

Ainsi l'endomorphisme φ est injectif, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie donc φ est bijectif. Ainsi il existe une matrice D telle $\varphi(D) = C$ et, par celle-ci, on obtient la similitude demandée.

Exercice 86 : [\[énoncé\]](#)

Il existe des matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que

$$B = PDP^{-1}$$

Si $AB^3 = B^3A$ alors

$$APD^3P^{-1} = PD^3P^{-1}A$$

puis on obtient

$$MD^3 = D^3M$$

avec $M = P^{-1}AP$.

Notons $m_{i,j}$ le coefficient général de M et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D .

La relation $MD^3 = D^3M$ donne

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j}\lambda_j^3 = m_{i,j}\lambda_i^3$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} = 0 \text{ ou } \lambda_i^3 = \lambda_j^3$$

Comme la fonction $x \mapsto x^3$ est injective sur \mathbb{R} , on obtient

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, m_{i,j} = 0 \text{ ou } \lambda_i = \lambda_j$$

et donc

$$MD = DM$$

puis

$$AB = BA$$

Exercice 87 : [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$A = PDP^{-1} \text{ et } B = Q\Delta Q^{-1}$$

avec $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D, \Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales.

Si $A^pMQ^q = O_n$ alors

$$D^pN\Delta^q = O_n$$

avec $N = P^{-1}MQ = (n_{i,j})$.

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et μ_1, \dots, μ_n les coefficients diagonaux de D et Δ , on obtient

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i^q n_{i,j} \mu_j^q = 0$$

et donc

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lambda_i n_{i,j} \mu_j = 0$$

puis

$$DN\Delta = O_n$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 88 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $\text{Im}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u + \text{Id}_E) = \{0\}$, on a

$$\text{rg}(u - \text{Id}_E) + \text{rg}(u + \text{Id}_E) \leq \dim E$$

puis par la formule du rang

$$\dim \ker(u - \text{Id}_E) + \dim \ker(u + \text{Id}_E) \geq \dim E$$

On en déduit que u est diagonalisable de valeurs propres possibles 1 et -1 .

Exercice 89 : [énoncé]

a) clair, notamment il n'y a pas de problème sur le degré de $\varphi(P)$.
 b) $\varphi(X^k) = X^k - k(X+1)X^{k-1} = (1-k)X^k - kX^{k-1}$. La matrice de φ dans la base canonique de E est triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux sont alors les racines du polynôme caractéristique et ce sont donc les valeurs propres de φ à savoir $1, 0, -1, \dots, (1-n)$. Ces $n+1 = \dim E$ valeurs sont distinctes donc φ est diagonalisable.

Exercice 90 : [énoncé]

L'application f est clairement linéaire de $\mathbb{R}[X]$ vers lui-même. De plus, si $\deg P \leq n$, il est aisé d'observer que $\deg f(P) \leq n$. On peut donc conclure que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ ce qui permet de former la représentation matricielle souhaitée. On constate alors que la matrice de f est triangulaire de coefficients diagonaux $0, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)$ distincts. Il est alors aisé de calculer le polynôme caractéristique de f est de conclure que f est diagonalisable, de valeurs propres $0, \dots, k(k+1), \dots, n(n+1)$ et de sous-espaces propres de dimension 1.

Exercice 91 : [énoncé]

a) Si $\deg P \leq n-1$, il est clair que $\varphi(P) \in E$. Si $\deg P = n$ après simplification des termes en X^{n+1} , on obtient que $\varphi(P) \in E$. La linéarité de φ est claire et donc on peut conclure que φ est un endomorphisme.
 b) La matrice de φ dans la base canonique est tri-diagonale et peu pratique. Formons plutôt la matrice de φ dans la base des $(X-a)^k$
 $\varphi((X-a)^k) = k(X-a)^k(X-b) - nX(X-a)^k$ donc
 $\varphi((X-a)^k) = (k-n)(X-a)^{k+1} + (k(a-b) - na)(X-a)^k$ et cette fois-ci la matrice de φ est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux distincts : $-nb, -(a+(n-1)b), -(2a+(n-2)b), \dots, -((n-1)a+b), -na$ qui sont les valeurs propres de φ . Puisque φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim E = n+1$, on peut conclure que φ est diagonalisable

Exercice 92 : [énoncé]

Si M appartient à l'hyperplan des matrices de trace nulle alors $\phi(M) = M$ et donc $M \in E_1(\phi)$.
 Ainsi l'espace propre $E_1(\phi)$ est de dimension au moins égale à $n^2 - 1$.
 De plus, $\phi(I_n) = (n+1)I_n$ donc l'espace propre $E_{n+1}(\phi)$ est de dimension au moins égale à 1.

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est au moins égale à $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme ϕ est diagonalisable (et les inégalités précédentes étaient des égalités).

Exercice 93 : [énoncé]

a) Soit P un polynôme. $P(F)(u) = P(f) \circ u$ donc $P(f) = 0 \Leftrightarrow P(F) = 0$. La diagonalisabilité étant équivalente à l'existence d'un polynôme scindé à racines simples, on peut conclure.
 b) f et F ont le même polynôme minimal donc les mêmes valeurs propres.
 c) Tout $u \in \mathcal{L}(E, E_\lambda(f)) \subset \mathcal{L}(E)$ est élément de $E_\lambda(F)$ donc $\dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \dim E_\lambda(f)$. Mais par diagonalisabilité $\dim \mathcal{L}(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(F)} \dim E_\lambda(F) \geq \dim E \times \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E)$ et donc on a les égalités $\dim E_\lambda(F) = \dim E \times \dim E_\lambda(f)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$.

Exercice 94 : [énoncé]

a) oui
 b) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$.
 Si $\text{Im} f \subset \ker p$ et $\ker p \subset \ker f$ alors $\mathcal{F}(f) = f$.
 Un tel endomorphisme f est entièrement déterminé par sa restriction de $\text{Im} p$ vers $\text{Im} p$.
 On en déduit $\dim E_1(\mathcal{F}) \geq (\dim \text{Im} p)^2$.
 Si $\text{Im} f \subset \ker p$ et $\text{Im} p \subset \ker f$ alors $\mathcal{F}(f) = 0$.
 Un tel endomorphisme f est entièrement déterminé par sa restriction de $\ker p$ vers $\ker p$.
 On en déduit $\dim E_0(\mathcal{F}) \geq (\dim \ker p)^2$.
 Si $\text{Im} f \subset \text{Im} p$ et $\text{Im} p \subset \ker f$ alors $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2}f$.
 Un tel endomorphisme f est entièrement déterminé par sa restriction de $\ker p$ vers $\text{Im} p$.
 Si $\text{Im} f \subset \ker p$ et $\ker p \subset \ker f$ alors $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2}f$.
 Un tel endomorphisme f est entièrement déterminé par sa restriction de $\text{Im} p$ vers $\ker p$.
 De plus un endomorphisme appartenant à ces deux dernières catégories est nécessairement nul.
 On en déduit $\dim E_{1/2}(\mathcal{F}) \geq 2 \dim \ker p \times \dim \text{Im} p$.
 Or $(\dim \text{Im} p)^2 + 2 \dim \ker p \dim \text{Im} p + (\dim \ker p)^2 = (\dim \text{Im} p + \dim \ker p)^2 = \dim E^2 = \dim \mathcal{L}(E)$ donc \mathcal{F} est diagonalisable et
 c) $\dim E_1(\mathcal{F}) = (\dim \text{Im} p)^2$, $\dim E_0(\mathcal{F}) = (\dim \ker p)^2$ et $\dim E_{1/2}(\mathcal{F}) = 2 \dim \ker p \times \dim \text{Im} p$.

Exercice 95 : [énoncé]

$$B = \alpha(X - x_0) \dots (X - x_n).$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ alors $B \mid (A - \lambda)P$. Pour des raisons de degré, B et $A - \lambda$ ne peuvent être premiers entre eux, ces polynômes ont donc une racine commune. Ainsi il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\lambda = A(x_i)$. Inversement pour $\lambda = A(x_i)$,

$$P = \prod_{j=0, j \neq i}^n (X - x_j), \Phi(P) = \lambda P \text{ avec } P \neq 0. \text{ Ainsi } \text{Sp}\Phi = \{A(x_i)/i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Précisons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = A(x_i)$. Quitte à réindexer, on peut supposer que $\lambda = A(x_0)$.

S'il existe d'autres x_i tels que $\lambda = A(x_i)$ on réindexe encore les x_1, \dots, x_n de sorte que $\lambda = A(x_0) = \dots = A(x_p)$ et $\lambda \neq A(x_{p+1}), \dots, A(x_n)$. Ainsi x_0, \dots, x_p sont racines de $A - \lambda$ alors que x_{p+1}, \dots, x_n ne le sont pas.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\Phi(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $B \mid (A - \lambda)P$. Or $A - \lambda = (X - x_0) \dots (X - x_p)\tilde{A}$ avec x_{p+1}, \dots, x_n non racines de \tilde{A} . Puisque $(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \wedge \tilde{A} = 1$, $B \mid (A - \lambda)P$ équivaut à $(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \mid P$.

Ainsi $E_\lambda(\Phi) = \{(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n)Q/Q \in \mathbb{R}_{n-p}[X]\}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égal à la dimension de l'espace, Φ est diagonalisable.

Exercice 96 : [énoncé]

Posons ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ étudié. On observe que $\phi^3 = \phi$. Par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que ϕ est diagonalisable de seules valeurs propres possibles 0, 1 et -1 .

En introduisant une base adaptée à la projection f , la matrice de cet

$$\text{endomorphisme est } \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ la matrice de u dans cette base, on obtient :

$$\phi(u) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \text{ et } C = 0.$$

$$\phi(u) = u \Leftrightarrow A = 0, C = 0 \text{ et } D = 0.$$

$$\phi(u) = -u \Leftrightarrow A = 0, B = 0 \text{ et } D = 0.$$

Exercice 97 : [énoncé]

Si $b = 0$ alors $f = 0$. Sinon, par la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a \mid x)b - (a \mid b)x.$$

$$f(b) = 0 \text{ et pour tout } x \in \text{Vect}(a)^\perp, f(x) = -(a \mid b)x.$$

Si $(a \mid b) \neq 0$ alors f est diagonalisable dans une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(a)^\perp \oplus \text{Vect}(b)$.

Si $(a \mid b) = 0$ alors $f(x) = (a \mid x)b$ et tout vecteur propre de f est soit colinéaire à b , soit orthogonal à a . Or b est orthogonal à a donc les vecteurs propres de f sont tous orthogonaux à a . Dans ce cas f est diagonalisable si, et seulement si, $a = 0$.

Exercice 98 : [énoncé]

Supposons f diagonalisable et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f . Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $g_{i,j}$ l'endomorphisme de E déterminé par $g_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k}e_i$. La famille $(g_{i,j})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ et on observe $T(g_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_k)g_{i,j}$ donc T est diagonalisable.

Supposons f nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Puisque $T^p(g)$ est combinaison linéaire de termes de la forme $f^k \circ g \circ f^{p-k}$, il est assuré que $T^{2n} = 0$ et donc que T est nilpotente.

Exercice 99 : [énoncé]

(\Rightarrow) Supposons f et g commutent.

$$\forall x \in \ker(f - \lambda \text{Id}), (f - \lambda \text{Id})(g(x)) = g(f(x) - \lambda x) = 0$$

donc $\ker(f - \lambda \text{Id})$ est stable par g .

(\Leftarrow) Supposons que chaque sous-espace propre soit stable par g .

Puisque $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$, pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$ avec

$x_\lambda \in E_\lambda$ et alors

$$(g \circ f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda) = (f \circ g)(x)$$

donc $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 100 : [énoncé]

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de v et μ_1, \dots, μ_n des complexes tels que $\mu_k^2 = \lambda_k$. Par interpolation, il existe un polynôme P (de degré strictement inférieur à n) tel que $P(\lambda_k) = \mu_k$. Considérons alors $u = P(v)$. Pour tout $x \in E_{\lambda_k}(v)$, $u(x) = P(v)(x) = P(\lambda_k)(x) = \mu_k x$ donc $u^2(x) = \lambda_k x = v(x)$. Les endomorphismes u^2 et v coïncident sur les espaces propres de v dont la somme est égale à E car v est diagonalisable.

Exercice 101 : [énoncé]

Rappelons que tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel possède au moins un valeur propre.

1ère démarche : Soit λ une valeur propre de f . $E_\lambda(f)$ est stable par f et donc possède un supplémentaire F stable par f .

Si $F = \{0\}$ alors f est diagonalisé.

Sinon, la restriction de f à F possède au moins une valeur propre μ qui est bien entendu valeur propre de f . L'espace $E_\lambda(f) \oplus E_\mu(f)$ est stable par f et donc possède un supplémentaire G stable par f .

Si $G = \{0\}$ alors f est diagonalisé.

Sinon, on itère le processus.

2ème démarche : Le sous-espace vectoriel $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}f} E_\lambda(f)$ est stable par f , il

admet donc un supplémentaire stable G , si $G \neq \{0\}$ alors f_G admet un vecteur propre qui sera aussi vecteur propre de f donc élément de F . C'est contradictoire donc $G = \{0\}$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}f} E_\lambda(f)$.

Exercice 102 : [énoncé]

a) ok

b) Supposons $g \in \mathcal{C}_f$. Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$ et tout $x \in E_\lambda(f)$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$ donc $g(x) \in E_\lambda(f)$. Ainsi les sous-espaces propres sont stables par g .

Inversement, supposons que chaque sous-espace propre soit stable par g . Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$ et on a

$$g(f(x)) = g\left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda x_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda)$$

et

$$f(g(x)) = f\left(\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} g(x_\lambda)\right) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda g(x_\lambda)$$

donc f et g commutent.

c) Considérons $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \mathcal{L}(E_\lambda(f))$ l'endomorphisme défini par $\varphi(g)$ est

le produit des restrictions aux $E_\lambda(f)$ de g . Cette application est bien définie en vertu des stabilités évoquées en b). Cette application est clairement bijective car, par diagonalisabilité de f , $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ et qu'on sait une application g est

alors entièrement déterminée par ses restrictions aux $E_\lambda(f)$. Par isomorphisme $\dim \mathcal{C}_f = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \alpha_\lambda^2$.

d) Ici $\dim \mathcal{C}_f = n$ et les $\text{Id}, f, \dots, f^{n-1}$ sont clairement éléments de \mathcal{C}_f .

Supposons $\lambda_0 \text{Id} + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$. Posons

$P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$. Ce polynôme est annulateur de f donc les valeurs propres de f en sont racines. Ce polynôme possède au moins n racines, or il est de degré strictement inférieur à n , donc il est nul et ainsi

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Finalement $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une famille libre formé de $n = \dim \mathcal{C}_f$ éléments de \mathcal{C}_f , c'en est donc une base.

Exercice 103 : [énoncé]

a) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de f et x_1, \dots, x_n des vecteurs propres associés. La famille (x_1, \dots, x_n) est base de E .

Posons $a = x_1 + \dots + x_n$. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$f^k(a) = \lambda_1^k x_1 + \dots + \lambda_n^k x_n$$

Supposons $\alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a) = 0$. En exprimant cette relation en fonction des vecteurs de la famille libre (x_1, \dots, x_n) , on parvient à

$$P(\lambda_1) = \dots = P(\lambda_n) = 0 \text{ avec}$$

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$$

Le polynôme P admet plus de racines que son degré donc $P = 0$ puis

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0.$$

Ainsi la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre et finalement base de E .

b) La matrice de f dans la base considérée est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$f^n(a) = \alpha_0 a + \alpha_1 f(a) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$$

Exercice 104 : [énoncé]

a) $\varphi(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. La matrice de φ relative à la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale.

b) Soit \mathcal{B} une base de E dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par une matrice diagonale D . En introduisant l'image réciproque de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par l'isomorphisme de représentation matricielle dans \mathcal{B} , on obtient une base de $\mathcal{L}(E)$ dans laquelle ϕ est représenté par une matrice diagonale.

Exercice 105 : [énoncé]

Les endomorphismes recherchés sont les endomorphismes diagonalisables.

En effet, si f est diagonalisable et si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors puisque $f|_F$ est diagonalisable, il existe une base de F formée de vecteurs propres de f . En complétant cette base à l'aide de vecteur bien choisis dans une base diagonalisant f , les vecteurs complétant engendrent un supplémentaire de F stable par f .

Inversement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie la propriété proposée alors le sous-espace vectoriel $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}f} E_\lambda(f)$ étant stable par f , celui-ci admet un supplémentaire stable. Or f ne possède pas de vecteurs propres sur ce dernier et celui ne peut donc qu'être $\{0\}$ car ici le corps de base est \mathbb{C} . Par suite $F = E$ et donc f est diagonalisable.

Exercice 106 : [énoncé]

On vérifie aisément que Φ est endomorphisme de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

a) En choisissant la base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices $E_{1,1}, E_{2,2}$ et $E_{1,2} + E_{2,1}$, on obtient la matrice de Φ suivante

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b \\ 0 & 2d & 2c \\ c & b & a+d \end{pmatrix}$$

b) Par la règle de Sarrus, on calcule $\chi_\Phi(\lambda)$ et on obtient

$$\chi_\Phi(2\lambda) = -4(2\lambda - (a+d))\chi_A(\lambda)$$

c) Posons Δ égal au discriminant de χ_A .

Si $\Delta > 0$ alors χ_Φ possède trois racines réelles distinctes

$$a+d, a+d+\sqrt{\Delta} \text{ et } a+d-\sqrt{\Delta}$$

Si $\Delta = 0$ alors χ_Φ possède une racine réelle triple

$$a+d$$

Si $\Delta < 0$ alors χ_Φ possède une racine réelle et deux racines complexes non réelles. Supposons Φ diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de Φ est scindé sur \mathbb{R} donc $\Delta \geq 0$.

Si $\Delta > 0$ alors χ_A possède deux racines réelles distinctes et donc la matrice A est diagonalisable.

Si $\Delta = 0$ alors Φ est diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre $\lambda = a+d$ donc l'endomorphisme Φ est une homothétie vectorielle de rapport égal

à cette valeur propre. On obtient matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 2b \\ 0 & 2d & 2c \\ c & b & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 & 0 \\ 0 & a+d & 0 \\ 0 & 0 & a+d \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et donc la matrice A est diagonalisable.

d) Supposons A diagonalisable

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur \mathbb{R} donc $\Delta \geq 0$.

Si $\Delta > 0$ alors Φ est diagonalisable car possède 3 valeurs propres réelles distinctes.

Si $\Delta = 0$ alors A possède une seule valeur propre et étant diagonalisable, c'est une matrice scalaire

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et alors la matrice de Φ est diagonale

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Exercice 107 : [énoncé]

A est diagonalisable avec $\text{Sp}A = \{1, 4\}$.

Pour P_n un polynôme vérifiant $P_n(1) = 1^n$ et $P_n(4) = 4^n$, on a $A^n = P(A)$.
 $P_n = 1^n + \frac{4^n - 1^n}{3}(X-1)$ convient et donc $A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 1}{3}I_3$.

Exercice 108 : [énoncé]

a) $\alpha = \text{tr}A = 2 \cos \theta$ et $\beta = -\det A = -\cos 2\theta$ conviennent.

b) Les racines de $X^2 - 2 \cos \theta X + \cos 2\theta$ sont $\cos \theta + \sin \theta$ et $\cos \theta - \sin \theta$.

Réalisons la division euclidienne X^n par $X^2 - 2 \cos \theta X + \cos 2\theta$.

$X^n = (X^2 - 2 \cos \theta X + \cos 2\theta)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < 2$,

$R(\cos \theta + \sin \theta) = (\cos \theta + \sin \theta)^n$ et $R(\cos \theta - \sin \theta) = (\cos \theta - \sin \theta)^n$.

On obtient $R = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^n - (\cos \theta - \sin \theta)^n}{2 \sin \theta} (X - \cos \theta - \sin \theta) + (\cos \theta + \sin \theta)^n$.

Exercice 109 : [énoncé]

a) $\text{sp}(A) = \{1, 3, -4\}$.

b) Il existe une matrice P inversible tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(1, 3, -4)$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est solution de l'équation $M^2 = A$ alors $(P^{-1}MP)^2 = D$ et donc $P^{-1}MP$ commute avec la matrice D . Or celle-ci est diagonale à coefficient diagonaux distincts donc $P^{-1}MP$ est diagonale de coefficients diagonaux a, b, c vérifiant $a^2 = 1, b^2 = 3$ et $c^2 = -4$. La réciproque est immédiate. Il y a 8 solutions possibles pour (a, b, c) et donc autant de solutions pour M . Les solutions réelles sont a fortiori des solutions complexes or toutes les solutions complexes vérifient $\text{tr}M = a + b + c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Il n'existe donc pas de solutions réelles.

Exercice 110 : [énoncé]

a) $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 6)$.

$\begin{cases} 5x + 3y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 2.

$\begin{cases} 5x + 3y = 6x \\ x + 3y = 6y \end{cases} \Leftrightarrow -x + 3y = 0$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6.

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Si M est solution alors $P^{-1}MP$ est solution de l'équation $X^2 + X = D$ donc $P^{-1}MP$ et D commutent or D est diagonale à coefficients diagonaux distincts donc $P^{-1}MP$ est diagonale

c) Les coefficients diagonaux a, b vérifient $a^2 + a = 2$ et $b^2 + b = 6$ donc $a = 1$ ou $a = -2$ et $b = 2$ ou $b = -3$. Au termes des calculs on obtient les solutions

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -11 & -3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Exercice 111 : [énoncé]

a)

$$\det(J - \lambda.I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n(\lambda^n - 1).$$

J possède exactement n valeurs propres qui sont les racines n ème de l'unité $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ avec $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

b) Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ la matrice de passage telle que $J = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$$

donc $P^{-1}AP = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_{n-1} D^{n-1} = \text{diag}((\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_i^k)_{0 \leq i \leq n-1})$

puis $\det A = \det(P^{-1}AP) = \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_i^k$.

Exercice 112 : [énoncé]

La colonne ${}^t(1 \ 1 \ 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 6.

Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines 6, $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

Ces deux matrices sont semblables à $\text{diag}(6, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2})$ et donc a fortiori semblables entre elles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais aussi, et c'est assez classique, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 113 : [énoncé]

$\varphi(I_2) = 1$ donc si P est inversible alors $\varphi(P^{-1}) = \varphi(P)^{-1}$. Par suite, si A et B sont semblables alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Puisque $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ sont semblables, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \mu$ puis

$\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \lambda\mu$. Ainsi pour A diagonale, $\varphi(A) = \det A$ et plus généralement

cela vaut encore pour A diagonalisable. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable, celle-ci est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 0$ alors $A^2 = 0$ et donc $\varphi(A) = 0 = \det A$.

Si $\lambda \neq 0$ alors puisque $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$ et que $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$ est diagonalisable, on obtient $2\varphi(A) = 2\lambda^2 = 2 \det A$ et on peut conclure.

Exercice 114 : [\[énoncé\]](#)

- a) C'est du cours.
- b) On charge le package permettant les manipulations linéaires puis on définit la matrice

```
with(linalg):
A:=matrix(4,4,[20,12,-4,12,-4,-3,9,-5,-4,1,5,-5,-8,-10,6,-2]);
```

On recherche les éléments propres de cette matrice

```
eigenvects(A);
```

On peut conclure que A est diagonalisable semblable à $\text{diag}(8, 4, 12, -4)$ et concrétiser cette diagonalisation

```
P:=concat(vector([-2, 3/2, 3/2, 1]),vector([-2, 1, 1, 2]),vector([-4, 1, 1, 2]),vector([-1, 1, 0, 1]));
evalm(inverse(P)*A*P);
```

On peut faire la même étude avec la deuxième matrice

```
B:=matrix(4,4,[-12,-16,-8,-4,4,13,1,-1,4,5,9,-1,8,10,2,6]);
eigenvects(B);
Q:=concat(vector([-4, 1, 1, 2]),vector([1, 0,-3, 1]),vector([0, 1,-3, 2]),vector([-2, 1, 1, 2]));
evalm(inverse(Q)*B*Q);
```

et on observe que la deuxième matrice est semblable à $\text{diag}(-4, 8, 8, 4)$.
 Puisque dans les deux cas la matrice A est diagonalisable, les matrices commutant avec A sont celles laissant stables les sous-espaces propres de A .
 Dans le premier cas, les matrices commutant avec A sont de la forme PDP^{-1} avec D matrice diagonale et P la matrice de passage définie dans le code Maple précédent..
 L'ensemble de ces matrices est une sous-algèbre de dimension 4 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.
 Dans le deuxième cas, les matrices commutant avec A sont de la forme $Q\Delta Q^{-1}$ avec Δ diagonale par blocs de la forme suivante

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

et Q la matrice de passage définie dans le code Maple précédent
 L'ensemble de ces matrices est une sous-algèbre de dimension 6 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.
 c) Dans les deux cas, si X est solution de l'équation $X^2 = A$ alors X commute avec A et la droite vectorielle sous-espace propre associée à la valeur propre

strictement négative de A est stable par X (aussi l'argument $\det A < 0$ permet d'affirmer l'incompatibilité de l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
 Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, les solutions de l'équation $X^2 = A$ sont à rechercher parmi les matrices commutant avec A et sont donc de la forme PDP^{-1} (ou $Q\Delta Q^{-1}$) avec D (ou Δ) de carré convenable.

Dans le premier cas, on obtient 16 solutions de la forme

$$P \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}\varepsilon_1 & & & (0) \\ & 2\varepsilon_2 & & \\ & & 2\sqrt{3}\varepsilon_3 & \\ (0) & & & 2i\varepsilon_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$.

Une solution particulière est obtenue par

```
evalm(P*diag(2*sqrt(2),2,2*sqrt(3),2*I)*inverse(P));
```

La somme des solutions est nulle et le produit des solutions vaut A^8 .

Dans le second cas, on obtient une infinité de solution de la forme

$$Q \begin{pmatrix} 2i\varepsilon_1 & & (0) \\ & 2\sqrt{2}S & \\ (0) & & 2\varepsilon_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $S^2 = I_2$.

Une solution particulière est obtenue par

```
evalm(Q*diag(2*I,2*sqrt(2),2*sqrt(2),2)*inverse(Q));
```

Exercice 115 : [\[énoncé\]](#)

- a) Pour tout élément $A \in G$, on a $A^{-1} = A$. On en déduit que pour tout $A, B \in G$,

$$AB = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA$$

- b) Montrons le résultat par récurrence forte sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, la propriété est immédiate.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1 \geq 1$.

Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de l'énoncé.

S'il n'existe pas d'autre élément dans G que I_n et $-I_n$, la propriété est acquise.

Sinon, il existe un élément $A \in G$ autre que I_n et $-I_n$. Puisque $A^2 = I_n$, on a

$$\ker(A - I_n) \oplus \ker(A + I_n) = \mathbb{R}^n$$

Il existe donc une matrice inversible P vérifiant

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Soit M un autre élément de G . Puisque A et M commutent, les sous-espaces propres de A sont stables par M et on peut donc écrire

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M' & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & M'' \end{pmatrix}$$

Sachant $M^2 = I_n$, on a $M'^2 = I_r$ et $M''^2 = I_{n-r}$ de sorte que les ensembles G' et G'' formés des matrices M' et M'' ainsi obtenues sont des sous-groupes de respectivement $(\text{GL}_r(\mathbb{R}), \times)$ et $(\text{GL}_{n-r}(\mathbb{R}), \times)$. Par hypothèse de récurrence, il existe P' et P'' inversibles telles que

$$\forall M' \in G', P'^{-1}M'P' \in D_r(\mathbb{K}) \text{ et } \forall M'' \in G'', P''^{-1}M''P'' \in D_{n-r}(\mathbb{K})$$

et en posant alors

$$Q = \begin{pmatrix} P' & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & P'' \end{pmatrix} P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

on a

$$\forall M \in G, Q^{-1}MQ \in D_n(\mathbb{K})$$

Récurrence établie.

c) Les matrices appartenant à G sont semblables, via une même matrice de passage, à des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux ne peuvent qu'être 1 et -1 . Il n'existe que 2^n matrices de ce type dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit

$$\text{Card}G \leq 2^n$$

d) Soit φ un isomorphisme de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ vers $(\text{GL}_m(\mathbb{R}), \times)$.

Considérons l'ensemble G formé des matrices diagonales M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = I_n$. G est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ de cardinal exactement 2^n .

Puisque pour tout $M \in G$,

$$\varphi(M)^2 = \varphi(M^2) = \varphi(I_n) = I_m$$

l'ensemble $\varphi(G)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_m(\mathbb{R}), \times)$ vérifiant

$$\forall M' \in \varphi(G), M'^2 = I_m$$

Par l'étude qui précède, on peut affirmer

$$\text{Card}\varphi(G) \leq 2^m$$

et puisque

$$\text{Card}\varphi(G) = \text{Card}G = 2^n$$

on en déduit $n \leq m$.

Un raisonnement symétrique donne $m \geq n$ et permet de conclure.

Exercice 116 : [énoncé]

a) Puisque de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable et son polynôme minimal est

$$\Pi_A = (X + 2)(X - 1)(X - 3)$$

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit

$$X^n = \Pi_A Q + R \text{ avec } \deg R < 2$$

Le polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = a(X - 1)(X - 3) + b(X - 3) + c$$

et l'évaluation de la relation division euclidienne en $-2, 1$ et 3 donne

$$\begin{cases} 15a - 5b + c = (-2)^n \\ 2b + c = 1 \\ c = 3^n \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} \\ b = \frac{3^n - 1}{2} \\ c = 3^n \end{cases}$$

et enfin

$$R(X) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} X^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} X + -\frac{3^n - (-2)^n - 5}{5}$$

En évaluant la relation de division euclidienne en A , on obtient

$$A^n = R(A) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} A^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} A + \frac{-3^n + (-2)^n + 5}{5} I_3$$

b) En vertu de ce qui précède

$$\text{ch}A = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{30} \left(3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{3\text{ch}3 + 2\text{ch}2 - 5\text{ch}1}{30}$$

De même, on obtient

$$\beta = \frac{3\text{ch}3 - 8\text{ch}2 + 5\text{ch}1}{30} \text{ et } \gamma = \frac{5\text{ch}1 + \text{ch}2 - \text{ch}3}{5}$$

Exercice 117 : [énoncé]

a) Puisque f possède n valeurs propres en dimension n , il est diagonalisable et ses valeurs propres sont simples. Les sous-espaces propres de f sont donc de dimension 1.

b) $g \circ f = g^3 = f \circ g$.

Puisque f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g .

Si x est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ alors $g(x)$ appartient au même sous-espace propre et puisque celui-ci est une droite et que x est non nul, $g(x)$ est colinéaire à x . Ainsi x est vecteur propre de g .

c) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et considérons une base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Un endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = f$ a une matrice diagonale dans la base de vecteurs propres de f précédente.

Résoudre l'équation $g^2 = f$ revient alors à résoudre l'équation $\Delta^2 = D$ avec Δ la matrice diagonale

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

L'équation $\Delta^2 = D$ équivaut à

$$\forall 1 \leq i \leq n, \alpha_i^2 = \lambda_i$$

Si les λ_i ne sont pas tous positifs ou nuls, il n'y a pas de solutions.

Si les λ_i sont tous positifs ou nuls alors les solutions de l'équation $g^2 = f$ sont les endomorphismes représentés dans la base de vecteurs propres de f par les matrices

$$\text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n})$$

Si aucune des valeurs propres n'est nulle, il y a 2^n solutions et si l'une d'elle est nulle, il y a 2^{n-1} solutions.

Exercice 118 : [énoncé]

Supposons que l'équation étudiée admet une solution θ .

En passant aux parties réelle et imaginaire on obtient

$$\begin{cases} \cos \theta + \cos k\theta = 1 \\ \sin \theta + \sin k\theta = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$\theta = -k\theta \quad [2\pi] \text{ ou } \theta = \pi - k\theta \quad [2\pi]$$

Si $\theta = \pi - k\theta \quad [2\pi]$ alors $\cos \theta + \cos k\theta = 0$ et le système initial n'est pas vérifié.

Si $\theta = -k\theta \quad [2\pi]$ alors

$$\cos \theta + \cos k\theta = 1 \Leftrightarrow \cos \theta = 1/2$$

ce qui donne $\theta = \pi/3 \quad [2\pi]$ ou $\theta = -\pi/3 \quad [2\pi]$.

Cas $\theta = \pi/3 \quad [2\pi]$

On obtient

$$\begin{cases} \theta = \pi/3 + 2p\pi \\ (k+1)\theta = 2q\pi \end{cases}$$

avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

On a alors

$$(6p+1)(k+1) = 6\ell$$

Puisque $6\ell \wedge (6p+1) = 1$, le théorème de Gauss donne $6 \mid (k+1)$.

Inversement, si $6 \mid (k+1)$ alors on peut écrire $k+1 = 6\ell$ et pour $\theta = \pi/3$

$$e^{i\pi/3} + e^{i(6\ell-1)\pi/3} = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 1$$

donc l'équation étudiée admet au moins une solution.

Cas $\theta = -\pi/3 \quad [2\pi]$

Une étude semblable conduit à la même condition.

Finalement, l'équation étudiée possède une solution réelle si, et seulement si,

$$6 \mid (k+1)$$

b) Supposons que 6 divise $k+1$. Pour $\theta = \pi/3$ on a

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

donc en multipliant par $e^{-ik\theta}$

$$e^{-ik\theta} = 1 + e^{-i(k-1)\theta}$$

La suite v de terme général $v_n = e^{-in\theta}$ vérifie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+k} = v_n + v_{n+k-1}$$

et donc la suite $u = Rev$ est un élément non nul de S_k . Puisque

$$u_n = \cos \frac{n\pi}{3}$$

la suite u est périodique et non nulle.

Inversement, montrons qu'il est nécessaire que 6 divise $k + 1$ pour qu'il existe une suite périodique non nulle dans S_k . On vérifie aisément que S_k est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension k dont une base est formée par les suites e_0, e_1, \dots, e_{k-1} déterminées par

$$\forall 0 \leq n \leq k-1, e_j(n) = \delta_{n,j} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, e_j(n+k) = e_j(n) + e_j(n+k-1)$$

Considérons l'endomorphisme $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ opérant sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On vérifie aisément que T laisse stable S_k ce qui permet d'introduire l'endomorphisme induit par T sur S_k que nous noterons encore T . Affirmer l'existence d'une suite périodique non nulle dans S_k signifie que 1 est valeur propre d'une puissance T^q de T .

La matrice de T dans la base (e_0, \dots, e_{k-1}) est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

car $T(e_{k-1}) = e_{k-1} + e_0$. Le polynôme caractéristique de T est

$$\chi_T(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -X & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{n-1}L_n$, on obtient

$$\chi_T(X) = (-1)^k (X^k - X^{k-1} - 1)$$

Les valeurs propres complexes de T sont alors les racines du polynôme

$$X^k - X^{k-1} - 1$$

On vérifie que ce polynôme et son polynôme dérivé n'ont pas de racines en commun ; on en déduit que T admet exactement k valeurs propres complexes distinctes. L'endomorphisme T est diagonalisable dans le cadre complexe, il en est de même de T^q dont les valeurs propres sont alors les puissances q ème des valeurs propres de T . Ainsi 1 est valeur propre de T^q si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} - 1 = 0 \text{ et } \lambda^q = 1$$

Un tel nombre complexe peut s'écrire $\lambda = e^{-i\theta}$ et l'on parvient alors à l'existence d'une solution à l'équation

$$e^{i\theta} + e^{ik\theta} = 1$$

et donc à la condition $6 \mid (k + 1)$.

Exercice 119 : [énoncé]

Introduisons la colonne $X_n = {}^t (u_n \quad v_n \quad w_n)$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de sorte qu'on ait $X_{n+1} = AX_n$ et donc $X_n = A^n X_0$.

Après réduction, on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors $A^n = PD^nP^{-1}$ puis

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0$$

La suite (X_n) converge si, et seulement si, la suite $(P^{-1}X_n)$ converge. Or

$$P^{-1}X_n = D^nP^{-1}X_0$$

converge si, et seulement si, les deux derniers coefficients de la colonne $P^{-1}X_0$ sont nuls ce qui donne X_0 de la forme

$$X_0 = P \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Finalement, les suites $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ convergent si, et seulement si, $u_0 = v_0 = w_0$ (et ces suites sont alors en fait constantes...)

Exercice 120 : [énoncé]

Son polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 121 : [énoncé]

- a) A est annule le polynôme χ_A qui est scindé donc A est trigonalisable.
- b) Soit T une matrice triangulaire semblable à A . Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Cependant A^k est semblables à T^k donc les valeurs propres de A^k sont les coefficients diagonaux de T^k or ceux-ci sont les puissances d'ordre k des coefficients diagonaux de T c'est-à-dire des valeurs propres de A .

Exercice 122 : [énoncé]

Il est entendu, qu'ici, le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est définie par

$$\chi_A = \det(X\text{Id} - A)$$

La matrice A est semblable à une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et donc A^q est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}$$

Ainsi le polynôme caractéristique de A^q est celui voulu.

Exercice 123 : [énoncé]

A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\exp(A)$ est alors semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & \star' \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Cela suffit pour conclure.

Exercice 124 : [énoncé]

Puisque le polynôme χ_A est scindé, la matrice A est trigonalisable. Plus précisément, la matrice A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice $P(A)$ est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\chi_{P(A)} = (-1)^n \prod_{k=1}^n (X - P(\lambda_k))$$

Exercice 125 : [énoncé]

- a) $\chi_A(X) = -(X + 1)(X - 1)^2$.
- b) $E_{-1} = \text{Vect}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E_1 = \text{Vect}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A n'est pas diagonalisable mais on peut la rendre semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $C_1 = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C_2 = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On détermine C_3 tel que $AC_3 = C_3 + C_2$. $C_3 = {}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = T$.

Exercice 126 : [énoncé]

- a) $\chi_A(X) = -(X - 1)^3$.
 b) $E_1 = \text{Vect}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice A n'est pas diagonalisable mais on peut la rendre semblable à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $C_1 = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On détermine C_2 tel que $AC_2 = C_2 + C_1$. $C_2 = {}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

On détermine C_3 tel que $AC_3 = C_3 + C_2$. $C_3 = {}^t \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = T$.

Exercice 127 : [énoncé]

- a) Contrairement à ce qu'entend l'énoncé, l'alternative $B \in \mathbb{K}[A]$ ou $A \in \mathbb{K}[B]$ n'est pas exclusive.

Commençons par quelques cas particuliers.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alors $A \in \mathbb{K}[B]$ en s'appuyant sur un polynôme constant.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les matrices qui commutent avec A sont

diagonales donc B est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. En considérant $P = aX + b$ tel que $P(\lambda_1) = \alpha_1$ et $P(\lambda_2) = \alpha_2$, on a $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$, une étude de commutativité par coefficients

inconnus donne $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Pour $P = \frac{\beta}{\mu}X + \alpha$ avec $\frac{\beta\lambda}{\mu} + \alpha = \alpha$, on a $B = P(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Enfin, dans le cas général, A est semblable à l'un des trois cas précédent via une matrice $P \in GL_2(\mathbb{K})$. La matrice $B' = P^{-1}BP$ commute alors avec $A' = P^{-1}AP$ donc B' est polynôme en A' et par le même polynôme B est polynôme en A .

- b) On imagine que non, reste à trouver un contre-exemple.

Par la recette des tâtonnements successifs ou saisi d'une inspiration venue d'en

haut, on peut proposer $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que

A et B commutent et ne sont ni l'un ni l'autre polynôme en l'autre car tout

polynôme en une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 128 : [énoncé]

- a) u admet une valeur propre λ et le sous-espace propre associé est stable par v . Cela assure que u et v ont un vecteur propre en commun e_1 . On complète celui-ci en une base (e_1, e_2, \dots, e_n) . Les matrices de u et v dans cette base sont de la

forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B' \end{pmatrix}$. Considérons les endomorphismes u' et v' de $E' = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ représentés par A' et B' dans (e_2, \dots, e_n) . $AB = BA$ donne $A'B' = B'A'$ et donc $[u', v'] = 0$. Cela permet d'itérer la méthode jusqu'à obtention d'une base de cotrigonalisation.

b) Par récurrence, on vérifie $[u^k, v] = k\lambda u^k$. L'endomorphisme $w \mapsto [w, v]$ de $\mathcal{L}(E)$ ne peut avoir une infinité de valeurs propres donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. L'endomorphisme u est nilpotent donc $\ker u \neq \{0\}$ ce qui permet d'affirmer que u et v ont un vecteur propre commun. On peut alors reprendre la démarche de la question a) sachant qu'ici $A'B' - B'A' = \lambda A'$.

c) Si $\alpha = 0$, l'étude qui précède peut se reprendre pour conclure. Si $\alpha \neq 0$, on introduit $w = \alpha u + \beta v$ et on vérifie $[w, v] = \alpha w$. Ainsi w et v sont cotrigonalisables puis u et v aussi cas $u = \frac{1}{\alpha}(w - \beta v)$.

Exercice 129 : [énoncé]

La matrice A est trigonalisable et si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres

distinctes alors $\text{tr}(A^m) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m$ avec α_j la multiplicité de la valeur propre λ_j .

Pour conclure, il suffit d'établir résultat suivant :

« Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.

Si $\sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ alors $\forall 1 \leq j \leq p, |\lambda_j| < 1$ ».

Raisonnons pour cela par récurrence sur $p \geq 1$.

Pour $p = 1$, la propriété est immédiate.

Supposons la propriété vraie au rang $p \geq 1$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (1)$$

Par décalage d'indice, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad (2)$$

$\lambda_{p+1} \times (1) - (2)$ donne

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j (\lambda_{p+1} - \lambda_j) \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

qui se comprend encore

$$\sum_{j=1}^p \beta_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

avec les β_1, \dots, β_p non nuls.

Par hypothèse de récurrence, on a alors $\forall 1 \leq j \leq p, |\lambda_j| < 1$.

On en déduit $\sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ et la relation (1) donne alors

$\alpha_{p+1} \lambda_{p+1}^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ d'où l'on tire $|\lambda_{p+1}| < 1$.

Récurrence établie.

Exercice 130 : [énoncé]

a) Supposons que B possède une valeur propre λ non nulle.

Soit $X \neq 0$ vecteur propre associé. On a $ABX = 0$ donc $\lambda AX = 0$ puis $AX = 0$ car $\lambda \neq 0$.

On en déduit que X est aussi vecteur propre de la matrice A (associé à la valeur propre nulle).

Supposons que B ne possède pas de valeur propre non nulle.

Puisque le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{C} et 0 est sa seule racine possible, on a nécessairement $\chi_B(X) = (-1)^n X^n$ et on en déduit que $B^n = O_n$ en vertu du théorème de Cayley Hamilton.

Si $B = O_n$ alors tout vecteur propre de A (et il en existe car le corps de base est \mathbb{C}) est aussi vecteur propre de B .

Si $B \neq O_n$ alors il existe une colonne X tel que $BX \neq 0$ et $B^2X = 0$.

La colonne $Y = BX$ est alors vecteur propre de B (associé à la valeur propre nulle) et puisque $AY = ABX = 0$, la colonne Y est aussi vecteur propre de A (aussi associé à la valeur propre nulle).

Dans tous les cas, les matrices A et B ont un vecteur propre en commun.

b) Par récurrence sur la taille n des matrices.

Pour $n = 1$, c'est immédiat.

Supposons la propriété vérifiée au rang $n - 1 \geq 1$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = O_n$. Soit X_1 un vecteur propre commun aux matrices A et B associé aux valeurs propres λ et μ respectivement. Soit P une matrice inversible dont la première colonne est X_1 . Par changement de base on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & \star \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

Puisque $AB = O_n$ on a $\lambda\mu = 0$ et $A'B' = O_{n-1}$.

Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $Q \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures. Pour la matrice

$$R = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

on obtient $R^{-1}AR$ et $R^{-1}BR$ triangulaires supérieures.

Récurrence établie

Exercice 131 : [énoncé]

On a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ O & P(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \star \\ O & \star \end{pmatrix}$ et

$$Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & \star \\ O & Q(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star \\ O & O \end{pmatrix}$$

donc $(PQ)(M) = P(M)Q(M) = \begin{pmatrix} O & \star \\ O & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \star \\ O & O \end{pmatrix} = O_n$.

Ainsi le polynôme PQ est annulateur de M .

Exercice 132 : [énoncé]

Les vecteurs de $(\text{Id}, u, \dots, u^p)$ évoluent dans $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension n^2 . Pour $p = n^2$ la famille est assurément liée. Une relation linéaire donne alors immédiatement un polynôme annulateur non nul.

Exercice 133 : [énoncé]

$u \circ (u - \text{Id}) \circ (u + \text{Id})$ s'annule sur $\ker(u \circ (u - \text{Id}))$ et sur $\ker(u \circ (u + \text{Id}))$ donc sur $\ker(u \circ (u - \text{Id})) + \ker(u \circ (u + \text{Id})) = E$ et ainsi $u \circ (u^2 - \text{Id}) = 0$.

Si $x \in \ker u$ alors $x \in \ker(u \circ (u - \text{Id})) \cap \ker(u \circ (u + \text{Id})) = \{0\}$ donc $\ker u = \{0\}$ et $u \in \text{GL}(E)$.

Par suite $u^2 - \text{Id} = u^{-1} \circ u \circ (u^2 - \text{Id}) = 0$ et donc $u^2 = \text{Id}$. Ainsi u est une symétrie vectorielle.

Exercice 134 : [énoncé]

Si P et Π_u sont premiers entre eux alors par l'égalité de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + V\Pi_u = 1$ donc $U(u)P(u) = \text{Id}_E$. Aussi $P(u)U(u) = \text{Id}_E$ donc $P(u)$ est inversible et $P(u)^{-1} = U(u) \in \mathbb{K}[u]$.

Si P et Π_u ne sont pas premiers entre eux alors on peut écrire $\Pi_u = QD$ avec D le pgcd de P et Π_u . On a $\Pi_u \mid PQ$ donc $P(u)Q(u) = 0$ alors que $Q(u) \neq 0$ puisque $\deg Q < \deg \Pi_u$. Par suite $P(u)$ n'est pas inversible.

Exercice 135 : [énoncé]

Π_u annule u donc aussi u_F et ainsi $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$. De même $\Pi_{u_G} \mid \Pi_u$ donc $\text{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G}) \mid \Pi_u$.
 Inversement si $P = \text{ppcm}(\Pi_{u_F}, \Pi_{u_G})$ alors $\forall x \in F, P(u)(x) = 0$ et $\forall x \in G, P(u)(x) = 0$ donc $\forall x \in E = F \oplus G, P(u)(x) = 0$ donc P annule u puis $\Pi_u \mid P$.

Exercice 136 : [énoncé]

Π_u annule u donc aussi u_F puis la conclusion.

Exercice 137 : [énoncé]

Considérons $B = A - I_n$. On a $B^2 = O_n$.
 Soit u l'endomorphisme de \mathbb{K}^n dont la matrice est B dans la base canonique.
 On a $u^2 = \tilde{0}$ donc $\text{Im} u \subset \ker u$.
 Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $\text{Im} u$ complétée en $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$ base de $\ker u$.
 Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, considérons $\varepsilon_j \in E$ tel que $u(\varepsilon_j) = e_j$.
 Supposons $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_p \varepsilon_p + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_q e_q = 0$.
 On appliquant u à cette relation, on obtient $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
 La relation initiale devient $\mu_1 e_1 + \dots + \mu_q e_q = 0$ qui entraîne $\mu_1 = \dots = \mu_q = 0$.
 Finalement la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$ est libre et puisque formée de $p + q = \dim \text{Im} u + \dim \ker u = n$ vecteurs de E , c'est une base de E .
 La matrice de u dans la base $(e_1, \varepsilon_1, \dots, e_p, \varepsilon_p, e_{p+1}, \dots, e_q)$ a alors ses coefficients tous nuls sauf p coefficients sur la sur-diagonale.
 La matrice B est donc semblable à la matrice précédente et $A = I_n + B$ est semblable à une matrice de la forme voulue.

Exercice 138 : [énoncé]

- Il suffit de procéder par récurrence en exploitant $f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} = f \circ (n f^n + g \circ f^n) + (I - f \circ g) \circ f^n$.
- Par linéarité $P(f) \circ g - g \circ P(f) = P'(f)$.
 Ainsi si P annule f alors P' aussi. Ceci est impossible en dimension finie car le polynôme minimal d'un endomorphisme annule celui-ci et est de degré minimal. Notons qu'un argument de calcul de trace est de loin plus rapide et plus simple!
- $f \circ g(P) = (XP)' = XP' + P$ et $g \circ f(P) = XP'$ donc $(f \circ g - g \circ f)(P) = P$.

Exercice 139 : [énoncé]

Supposons n est impair. Le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de degré impair possèdera une racine qui sera valeur propre de la matrice et aussi racine de son polynôme minimal. Celui-ci ne peut alors être le polynôme $X^2 + 1$.

Supposons n est pair. Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n = \text{diag}(A, \dots, A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

A_n n'est pas une homothétie donc le degré de son polynôme minimal est supérieur à 2.

De plus $A_n^2 = -I_n$ donc $X^2 + 1$ annule A_n .
 Au final, $X^2 + 1$ est polynôme minimal de A_n .

Exercice 140 : [énoncé]

$P = X(X^2 - 3aX + a^2)$ est annulateur de f donc par le théorème de décomposition des noyaux, $E = \ker f \oplus \ker(f^2 - 3af + a^2 \text{Id})$ car X et $X^2 - 3aX + a^2$ sont premiers entre eux. Or a étant non nul, on montre élémentairement $\ker(f^2 - 3af + a^2 \text{Id}) \subset \text{Im} f$ tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que $(f^2 - 3af + a^2 \text{Id}) \circ f = 0$. Il est donc vrai que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires.

Exercice 141 : [énoncé]

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + b, \dots, a + b, a - b, \dots, a - b)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & (0) & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (0) & & & 1 & 0 & (0) & -1 \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 1 & & (0) & 0 & -1 & & (0) \end{pmatrix}.$$

Par suite $\pi_A = (X - (a + b))(X - (a - b))$ et les polynômes annulateurs de A sont les multiples de π_A .

Exercice 142 : [énoncé]

On peut écrire $\Pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$
 décomposition en somme de sous-espaces vectoriels stables par f .

Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $\ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1} \neq \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$ par minimalité de Π_f et donc il existe $x_\lambda \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda} \setminus \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1}$.

On peut alors établir que la famille $((f - \lambda \text{Id})^k(x_\lambda))_{0 \leq k \leq \alpha_\lambda - 1}$ est libre.

Considérons maintenant $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$.

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} P(f)(x_\lambda)$ avec $P(f)(x_\lambda) \in \ker(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$ par

stabilité.

Par décomposition en somme directe, $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(f), P(f)(x_\lambda) = 0$.

Par division euclidienne $P = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} Q + R$ avec $\deg R < \alpha_\lambda$ de sorte qu'on

puisse écrire $R = \sum_{k=0}^{\alpha_\lambda - 1} a_k (X - \lambda)^k$. On alors $P(f)(x_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \forall 0 \leq k < \alpha_\lambda, a_k = 0$.

Ainsi $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(f), (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \mid P$

Enfin puisque les termes $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ sont premiers entre eux, on peut conclure $P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow \Pi_f \mid P$.

Exercice 143 : [\[énoncé\]](#)

Cas particulier : Supposons que 1 est la seule valeur propre de A .

La matrice A est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1. Ceci permet d'écrire $P^{-1}AP = T$ avec P inversible et

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Notons a l'élément d'indice $(1, 2)$ de cette matrice.

Par une récurrence facile, on montre

$$P^{-1}A^m P = \begin{pmatrix} 1 & ma & \star \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

Or $\|A\| \leq 1$, donc $\|A^m\| \leq 1$ puis $\frac{1}{m}A^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} O_n$ et enfin

$$\frac{1}{m}P^{-1}A^m P \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} O_n.$$

Or

$$\frac{1}{m}P^{-1}A^m P = \begin{pmatrix} 1/m & a & \star \\ & 1/m & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1/m \end{pmatrix}$$

On en déduit $a = 0$.

Par ce principe, on peut annuler successivement chaque coefficient de la sur-diagonale de T puis chaque coefficient de la sur-diagonale suivante etc.

Au final $T = I_n$ puis $A = I_n$ et le polynôme minimal de A est $\Pi_A = X - 1$.

Cas général :

Le polynôme minimal de A s'écrit $\Pi_A = (X - 1)^\alpha Q(X)$ avec $Q(1) \neq 0$.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\mathbb{C}^n = F \oplus G$ avec $F = \ker(A - I)^\alpha$ et $G = \ker Q(A)$.

Notons B la matrice de l'endomorphisme induit par A sur le sous-espace vectoriel stable F . On vérifie que 1 est la seule valeur propre de B et que $\|B\| \leq 1$. L'étude qui précède assure alors que $B = I_n$ et donc le polynôme $X - 1$ annule A sur F .

De plus le polynôme Q annule A sur G donc le polynôme $(X - 1)Q$ annule A sur \mathbb{C}^n . Puisque 1 n'est pas racine de Q , 1 n'est que racine simple du polynôme minimal Π_A .

Exercice 144 : [\[énoncé\]](#)

a) Si $\ker(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}$ alors $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}) = E$ car $u - \lambda \text{Id}$ est inversible.

On en déduit que λ est séparable.

Par contraposée, si λ n'est pas séparable alors λ est valeur propre de u .

b) Si u est un endomorphisme diagonalisable alors pour tout scalaire λ ,

$$\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^2.$$

Par suite $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}) \cap \ker(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}$ et on en déduit que λ est séparable.

Inversement, soit u un endomorphisme scindé dont toutes les valeurs propres sont séparables.

Puisque le polynôme caractéristique de u est scindé, on peut écrire

$$\chi_u = (-1)^{\dim E} \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

et par le lemme de décomposition des noyaux

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}u} \ker(u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$$

Or, pour toute valeur propre λ , $\text{Im}(u - \lambda \text{Id}) \cap \ker(u - \lambda \text{Id}) = \{0\}$ entraîne

$\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^2$ puis par le principe des noyaux itérés

$\ker(u - \lambda \text{Id}) = \ker(u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$. Par suite

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}u} \ker(u - \lambda \text{Id})$$

et donc u est diagonalisable

c) Soit λ une valeur propre de u . Le polynôme minimal de u peut s'écrire

$$\pi_u = (X - \lambda)^\alpha Q \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

$\pi_u(u) = 0$ donne

$$\text{Im}Q(u) \subset \ker(u - \lambda\text{Id})^\alpha$$

Si λ est une valeur propre séparable alors $\ker(u - \lambda\text{Id}) = \ker(u - \lambda\text{Id})^\alpha$ et donc

$$\text{Im}Q(u) \subset \ker(u - \lambda\text{Id})$$

puis le polynôme $(X - \lambda)Q$ annule u . Par minimalité de π_u , on conclut $\alpha = 1$. Inversement, si λ est une racine simple du polynôme minimal, alors

$$\pi_u = (X - \lambda)Q \text{ avec } Q(\lambda) \neq 0$$

Puisque les polynômes Q et $X - \lambda$ sont premiers entre eux, on peut écrire

$$QU + (X - \lambda)V = 1 \text{ avec } U, V \in \mathbb{K}[X]$$

et en évaluant

$$Q(u)U(u)(x) + (u - \lambda\text{Id})V(u)(x) = x$$

avec $Q(u)U(u)(x) \in \ker(u - \lambda\text{Id})$ (car π_u est annulateur) et $(u - \lambda\text{Id})V(u)(x) \in \text{Im}(u - \lambda\text{Id})$.

Ainsi λ est une valeur propre séparable.

Finalement les scalaires non séparables sont les racines multiples de π_u .

d) $m(v) = u \circ v$, $m^2(v) = u^2 \circ v, \dots P(m)(v) = P(u) \circ v$ pour tout polynôme P .

Par suite les endomorphismes m et u ont les mêmes polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal. Puisque les scalaires non séparables sont les racines multiples du polynôme minimal, les endomorphismes u et m ont les mêmes valeurs séparables.

Exercice 145 : [énoncé]

Puisque u possède un polynôme annulateur, on a

$$\dim \mathbb{K}[u] < +\infty$$

Or $\mathbb{K}[Q(u)] \subset \mathbb{K}[u]$ donc

$$\dim \mathbb{K}[Q(u)] < +\infty$$

et par conséquent $Q(u)$ possède un polynôme annulateur.

Exercice 146 : [énoncé]

Quitte à considérer λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ bien choisi, on peut supposer

$$P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 1$$

ce qui permet d'écrire

$$P(X) = X + X^2Q(X) \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X]$$

Soit $x \in \text{Im}f \cap \ker f$. Il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ et on a $f(x) = 0$. On en déduit $f^2(a) = 0$. Or $P(f)(a) = 0$ et

$$P(f)(a) = f(a) + Q(f)(f^2(a)) = f(a) = x$$

Ainsi

$$\text{Im}f \cap \ker f = \{0\}$$

Soit $x \in E$.

Analyse :

Supposons $x = u + v$ avec $u = f(a) \in \text{Im}f$ et $v \in \ker f$.

On a

$$f(x) = f^2(a) + f(v) = f^2(a)$$

Or

$$P(f)(x) = f(x) + f^2(Q(f)(x)) = 0$$

donc

$$f(x) = f^2(-Q(f)(x))$$

Synthèse :

Posons $u = -f(Q(f)(x))$ et $v = x - u$.

On a immédiatement $u \in \text{Im}f$ et $x = u + v$.

On a aussi

$$f(v) = f(x) - f(u) = f(x) + f^2(Q(f)(x)) = P(f)(x) = 0$$

et donc $v \in \ker f$.

Exercice 147 : [énoncé]

On sait déjà $\ker u \subset \ker u^2$.

Inversement, soit $x \in \ker u^2$.

Notons P le polynôme annulateur en question. On peut écrire

$$P(X) = aX + X^2Q(X) \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } Q \in \mathbb{K}[X]$$

L'égalité $P(u)(x) = 0$ donne

$$au(x) + Q(u)(u^2(x)) = 0$$

et donc $u(x) = 0$ car $a \neq 0$ et $u^2(x) = 0$.

Ainsi $x \in \ker u$ et on peut conclure.

Exercice 148 : [énoncé]

Soit x vecteur propre associé à la valeur propre λ .

$P(f)(x) = P(\lambda)x$ or $P(f) = 0$ et $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$.

Exercice 149 : [énoncé]

$\varphi^2 = \text{Id}$ donc $X^2 - 1$ est annulateur de φ . Les valeurs propres de φ ne peuvent être que 1 et -1 . En prenant pour f une fonction paire et une fonction impaire non nulle, on montre que 1 et -1 sont effectivement valeurs propres de φ .

Exercice 150 : [énoncé]

a) On vérifie $T^2 = \text{Id}$ donc T est un automorphisme et $T^{-1} = T$.

b) Puisque T annule $X^2 - 1$, $\text{Sp}T \subset \{1, -1\}$ puis égale car par exemple 1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1 et $X - 1/2$ est vecteur propre associé à la valeur propre -1 .

Exercice 151 : [énoncé]

Les valeurs propres de u sont racines des polynômes annulateurs donc du polynôme minimal.

Soit a une racine de Π_u . On a $\Pi_u = (X - a)P$ et $P(u) \neq 0$ car P ne peut être annulateur de u . Pour $y \in \text{Im}(P(u)) \setminus \{0\}$, il existe $x \in E$, $y = P(u)(x)$ et $\Pi(u)(x) = 0$ donc $(u - a\text{Id})(y) = 0$ avec $y \neq 0$. Ainsi a est valeur propre de u (et y est vecteur propre associé).

Exercice 152 : [énoncé]

Soit M solution. $M^4 = {}^t(M^2) = M$ donc $X^4 - X$ est annulateur de M et puisque 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de M , $X^3 - 1$ puis $X^2 + X + 1$ sont annulateurs de M .

Ainsi, on peut affirmer $M^3 = {}^tMM = I$ (ainsi $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) et $M^2 + M + I = 0$. Pour $X \neq 0$, $P = \text{Vect}(X, MX)$ est un plan (car il n'y a pas de valeurs propres réelles) stable par M (car $M^2 = -M - I$). La restriction de M à ce plan est un

automorphisme orthogonal sans valeur propre, c'est donc une rotation et celle-ci est d'angle $\pm 2\pi/3$ car $M^3 = I_n$. De plus ce plan est aussi stable par $M^2 = {}^tM$ donc P^\perp est stable par M ce qui permet de reprendre le raisonnement à partir d'un $X' \in P^\perp \setminus \{0\}$. Au final, M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs et aux blocs diagonaux égaux à $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

La réciproque est immédiate.

Exercice 153 : [énoncé]

a) Puisque A est nilpotente, A ne peut avoir que des valeurs propres nulles. Les valeurs propres étant les racines du polynôme caractéristique et ce dernier étant scindé sur \mathbb{C} , $\chi_A = (-1)^n X^n$.

b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a aussi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le polynôme caractéristique est calculé par la même formule dans les deux cas.

Exercice 154 : [énoncé]

$\chi_A = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ annule matrice A .

On en déduit $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - A)$.

Exercice 155 : [énoncé]

$\chi_A = (\lambda_1 - X) \dots (\lambda_n - X)$ annule A en vertu du théorème de Cayley Hamilton.

Exercice 156 : [énoncé]

Considérons le polynôme caractéristique de u :

$$\chi_u = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \text{ avec } a_0 = \det u \neq 0$$

Puisque $\chi_u(u) = \tilde{0}$, on obtient

$$a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0 \text{Id} = \tilde{0}$$

Par suite

$$a_n u^n + \dots + a_1 u = -a_0 \text{Id}$$

En composant avec u^{-1} à gauche on obtient

$$a_n u^{n-1} + \dots + a_1 \text{Id} = -a_0 u^{-1}$$

et on en déduit

$$u^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_n u^{n-1} + \dots + a_1 \text{Id}_E) \in \mathbb{K}[u]$$

Exercice 157 : [énoncé]

- a) Si f est diagonalisable alors f est représenté par λI_n dans une certaine base et donc f est une homothétie vectorielle. La réciproque est immédiate.
- b) Calculé dans une base de triangulation, $\chi_f(x) = (x - \lambda)^n$.
- c) χ_f est annulateur de f dans $(f - \lambda \text{Id})^n = \tilde{0}$.

Exercice 158 : [énoncé]

- a) Le polynôme caractéristique de f est un polynôme de degré n annulant f . Ainsi $f^n \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $m \geq n$, $f^m \in \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$. Par suite $f^n(x), \dots, f^{N-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ puis $E = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{N-1}(x))$ donne $E = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$. La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est alors génératrice et formée de $n = \dim E$ vecteurs de E , c'est donc une base de E .
- b) Les polynômes en f commute avec f . Inversement, supposons que $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec f . Puisque $g(x) \in E$, on peut écrire $g(x) = a_0x + a_1f(x) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(x)$. Puisque f et g commute, on a encore $g(f^k(x)) = a_0f^k(x) + a_1f^{k+1}(x) + \dots + a_{n-1}f^{n+k-1}(x)$ de sorte que les endomorphismes g et $a_0\text{Id} + a_1f + \dots + a_{n-1}f^{n-1}$ coïncident sur une base de E et c'est donc égaux. Au final f est un polynôme en f .

Exercice 159 : [énoncé]

- a) $A^2M = AMB = MB^2$ et ainsi de suite : $A^pM = MB^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par linéarité $P(A)M = MP(B)$.
- b) Considérons $P = \chi_A$. La relation $P(A)M = MP(B)$ entraîne $MP(B) = O_n$. Or $M \neq O_n$ donc la matrice $P(B)$ n'est pas inversible. Par suite $\det(P(B)) = 0$. Or

$$P = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

avec λ_i valeur propre de A donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ telle que

$$\det(B - \lambda_i I_n) = 0$$

Ainsi A et B ont une valeur propre commune.

Exercice 160 : [énoncé]

Considérons $T : P(X) \mapsto P(X + 1)$. T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui est annulé par son polynôme caractéristique de la forme $\chi_T = (-1)^n (X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k)$.

Exercice 161 : [énoncé]

- 1. Puisque les matrices A et qA sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \chi_{qA}(X) = \det(qA - XI_n) = q^n \det\left(A - \frac{X}{q} I_n\right) = q^n \chi_A\left(\frac{X}{q}\right)$$

Introduisons les coefficients du polynôme χ_A

$$\chi_A(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

L'égalité précédente entraîne $a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0$ car $q^k \neq 1$ pour tout $1 \leq k \leq n - 1$. Ainsi $\chi_A = a_n X^n$ et puisque χ_A est annulateur de A , la matrice A est nilpotente.

2.

On définit la matrice A

```
A:=matrix(6,6,(i,j)->if j=i+1 or (i=1 and j=6) then 1 else 0 fi);
```

- a) On introduit une matrice M quelconque et on calcule $AM - 2MA$

```
M:=matrix(6,6);
B:=evalm(A&*M-2*M&*A);
```

On résout le système correspondant à l'équation $AM = 2MA$

```
solve({seq(seq(B[i,j]=0,i=1..6),j=1..6)});
```

Enfin on visualise la matrice M

```
assign(%);
evalm(M);
```

On obtient les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,6} \\ 0 & 2m_{1,1} & 2m_{1,2} & 2m_{1,3} & 2m_{1,4} & 2m_{1,5} - 30m_{1,1} \\ 0 & 0 & 4m_{1,1} & 4m_{1,2} & 4m_{1,3} & 4m_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 8m_{1,1} & 8m_{1,2} & 8m_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16m_{1,1} & 16m_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32m_{1,1} \end{pmatrix}$$

- b) L'ensemble des matrices obtenu est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$. C'est entendu car c'est en fait le noyau de l'application linéaire $M \mapsto AM - 2MA$.
- c) Une matrice M inversible vérifiant $M^{-1}AM = 2A$ doit aussi vérifier $AM = 2MA$ et est donc de la forme précédente. De plus, une matrice de la forme précédente est inversible si, et seulement si, $m_{1,1} \neq 0$. Inversement, une matrice M de la forme précédente avec $m_{1,1} \neq 0$ vérifie $M^{-1}AM = 2A$.

Exercice 162 : [\[énoncé\]](#)

a) Par le théorème de Cayley Hamilton, on a

$$\chi_u(u) = \vec{0}$$

avec χ_u polynôme de coefficient constant $\det u \neq 0$.

En écrivant

$$\chi_u(X) = XP(X) + \det u$$

le polynôme

$$Q(X) = -\frac{1}{\det u}P(X)$$

est solution.

b) Considérons l'endomorphisme v de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(X/2)$.

On vérifie aisément $u \circ v = v \circ u = \text{Id}$ ce qui permet d'affirmer que u est inversible d'inverse v .

Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré exactement n .

Si $u(P) = \lambda P$ alors par identification des coefficients de degré n , on obtient

$$\lambda = 2^n$$

puis on en déduit

$$P = a_n X^n$$

La réciproque étant immédiate, on peut affirmer

$$\text{Sp}u = \{2^n / n \in \mathbb{N}\} \text{ et } E_{2^n}(u) = \text{Vect}(X^n)$$

Si par l'absurde il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$u^{-1} = Q(u)$$

alors le polynôme non nul

$$XQ(X) - 1$$

est annulateur de u . Les valeurs propres de u sont alors racines de celui-ci ce qui donne une infinité de racines.

C'est absurde.

Exercice 163 : [\[énoncé\]](#)

$\mu_A \mid \chi_A = (X - 1)^2$ mais A n'est pas diagonalisable, donc $\mu_A = (X - 1)^2$.

Exercice 164 : [\[énoncé\]](#)

a) 1ère méthode :

$$\det(M - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1) - \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ (n-1) - \lambda & -\lambda & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ (n-1) - \lambda & 1 & & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$((n-1) - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda - 1 & & 0 \\ \vdots & * & \ddots & \\ 0 & * & * & -\lambda - 1 \end{vmatrix}$$

puis $\det(M - \lambda I_n) = ((n-1) - \lambda)(-\lambda - 1)^{n-1}$ et donc $\text{sp}(M) = \{-1, (n-1)\}$.

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M .

$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0$.

Donc E_{-1} est l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$.

Puisque E_{n-1} est au moins une droite vectorielle, la matrice M est diagonalisable.

2ème méthode :

Par le calcul, on observe que $M^2 = (n-1)I_n + (n-2)M$.

Par suite, M annule le polynôme scindé simple $(X+1)(X-(n-1))$ et donc M est diagonalisable.

b) Le polynôme minimal de M est $(X+1)(X-(n-1))$ car en vertu de la première méthode, la connaissance des valeurs propres de M détermine son polynôme minimal sachant M diagonalisable et, pour la deuxième méthode, ce polynôme est annulateur alors que les polynômes $X+1$ et $X-(n-1)$ ne le sont pas.

Par division euclidienne $X^p = (X+1)(X-(n-1))Q + \alpha X + \beta$

En évaluant la relation en -1 et en $n-1$, on obtient

$$\text{avec } \begin{cases} -\alpha + \beta = (-1)^p \\ \alpha(n-1) + \beta = (n-1)^p \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} \alpha = \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} \\ \beta = \frac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n} \end{cases}$$

d'où $M^p = \frac{(n-1)^p - (-1)^p}{n}M + \frac{(n-1)^p + (n-1)(-1)^p}{n}I_n$.

Exercice 165 : [\[énoncé\]](#)

a) Il est clair que L est linéaire.

Si $\text{tr}(M) = 0$ alors $L(M) = aM$.

a est valeur propre de L et le sous-espace propre associé est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Si $\text{tr}(M) \neq 0$ alors $L(M) = \lambda M$ implique $M \in \text{Vect}(I_n)$. Or $L(I_n) = (a+n)I_n$ donc $a+n$ est valeur propre de L et le sous-espace propre associé est la droite $\text{Vect}(I_n)$.

L'endomorphisme L est donc diagonalisable et par suite

$$\mu_L(X) = (X - a)(X - (a+n)).$$

b) En dimension finie, L est un automorphisme si, et seulement si, $0 \notin \text{Sp}(L)$ i.e. $a \neq 0, -n$.

Puisque

$$L^2 - (2a+n)L + a(a+n)I = 0$$

on a

$$L^{-1} = \frac{1}{a(a+n)}(L - (2a+n)I)$$

et donc

$$L^{-1}(M) = \frac{1}{a(a+n)}(\text{tr}(M)I_n - (a+n)M)$$

Exercice 166 : [énoncé]

a) Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les composantes de x dans une base de diagonalisation \mathcal{B} de f . La matrice de la famille (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f comptées avec multiplicité. Cette matrice est de rang n , si, et seulement si,

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0 \text{ et } \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Par déterminant de Vandermonde, on peut assurer l'existence de x tel que voulu si, et seulement, si les valeurs propres de f sont deux à deux distincts et non nulles. N'importe quel x aux composantes toutes non nulles est alors convenable.

b) Les polynômes en f commutent avec f .

Supposons que g soit un endomorphisme de E commutant avec f .

On peut écrire $g(x_1) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = P(f)(x_1)$ avec

$$P = a_1 + a_2 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}.$$

On a alors

$$g(x_2) = g(f(x_1)) = f(g(x_1)) = f(P(f)(x_1)) = P(f)(f(x_1)) = P(f)(x_2).$$

Plus généralement, en exploitant $x_k = f^{k-1}(x_1)$, on obtient $g(x_k) = P(f)(x_k)$.

Les endomorphismes g et $P(f)$ coïncident sur les éléments d'une base, ils sont donc égaux. Finalement, le commutant de f est exactement formé des polynômes en f .

Si le polynôme minimal Π_f de f est de degré $< n$ alors la famille $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est liée et alors pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ l'est aussi. Cela contredit l'hypothèse de départ. On peut donc affirmer que $\deg \Pi_f \geq n$ et puisque $\Pi_f \mid \chi_f$, on a $\Pi_f = (-1)\chi_f$ avec χ_f polynôme caractéristique de f .

Exercice 167 : [énoncé]

A est symétrique donc diagonalisable. $\chi_A = -X^3 + 2X$, $\pi_A = -\chi_A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^k A \text{ et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0.$$

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \text{sh}(2)A + \frac{1}{2}(\text{ch}(2) - 1)A^2.$$

Exercice 168 : [énoncé]

A est symétrique donc diagonalisable.

$$\chi_A = (-1)^n (X - (a + (n-1)b)(X - (a-b))^{n-1})$$

$$\text{Sp}(A) = \{a + (n-1)b, a-b\} \text{ (si } n \geq 2)$$

$$\pi_A = (X - (a + (n-1)b))(X - (a-b))$$

A est inversible si, et seulement si, $0 \notin \text{Sp}(A)$ i.e. $a + (n-1)b \neq 0$ et $a \neq b$.

$$\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & & (y) \\ & \ddots & \\ (y) & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = ax + (n-1)by \\ \beta = ay + bx + (n-2)by \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{cases} ax + (n-1)by = 1 \\ bx + (a + (n-2)b)y = 0 \end{cases}$$

pour expliciter A^{-1} .

Exercice 169 : [énoncé]

$$a) \chi_A = -(X-2)(X+1)^2, E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec $P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

b) Ci-dessus.

c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec $\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $\beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$ donc $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}I_3$ puis $e^A = \frac{e^2 - e^{-1}}{3}A + \frac{2e^{-1} + e^2}{3}I_3$.

Exercice 170 : [énoncé]

$$\chi_A = -X(X^2+1), \pi_A = X(X^2+1), \exp(A)\exp(tA) = \exp(A)\exp(-A) = I_3.$$

$$\text{En calculant } A^2, A^3, \dots \text{ on obtient } \exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 171 : [énoncé]

$A^2 = O$ donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$. $\exp(A) = I + A$.

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 172 : [énoncé]

Soient $P \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de permutation et σ la permutation associée. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^q = \text{Id}$ et donc $P^q = I_n$. La matrice P annule alors $X^q - 1$ qui est scindé à racines simples donc P est diagonalisable.

Exercice 173 : [énoncé]

$A^2 = -I_{2n}$. On observe que $X^2 + 1$ est annulateur de A .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors A est diagonalisable car annule le polynôme $X^2 + 1$ qui est scindé à racines simples.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors A n'est pas diagonalisable car sans valeurs propres. En effet une valeur propre (réelle) de A doit être annulé par le polynôme $X^2 + 1$.

Exercice 174 : [énoncé]

a) $A^2 = -I_{2n}$.

b) $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est annulateur de A et scindé simple donc A est diagonalisable. De plus A est réelle donc ses valeurs propres sont deux à deux conjuguées, deux valeurs propres conjuguées ont même multiplicité. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines de $X^2 + 1$ et que la matrice complexe A possède au moins une valeur propre, on peut affirmer que i et $-i$ sont les deux seules valeurs propres de A , qu'elles sont de multiplicité n . Enfin les sous-espaces propres associés sont de dimension n car A est diagonalisable et donc les dimensions des sous-espaces propres égales la multiplicité des valeurs propres respectives.

Exercice 175 : [énoncé]

f est diagonalisable car annule le polynôme

$$X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$$

scindé simple. Les valeurs propres de f figurent parmi $\{-2, 0, 2\}$ et donc la trace de f qui est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité est paire.

Exercice 176 : [énoncé]

A annule un polynôme scindé à racines simples ($1, i$ et $-i$) donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Les valeurs propres possibles de A sont $1, i$ et $-i$. Puisque $\text{tr}(A) \in \mathbb{R}$, la multiplicité de i égale celle de $-i$.

Par suite $\det(A) = 1$.

Exercice 177 : [énoncé]

a) Puisque $p^4 = p^2$, une valeur propre λ doit vérifier $\lambda^4 = \lambda^2$ donc $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Si p est diagonalisable alors sa matrice A dans une base de vecteurs propres sera diagonale avec des $-1, 0$ ou 1 sur la diagonale. Comme alors $A^3 = A$ on a $p^3 = p$.

Si $p^3 = p$ alors p est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc p est diagonalisable.

Exercice 178 : [énoncé]

Si 1 et -1 sont les seules valeurs propres alors $f \in \text{GL}(E)$ et la relation $f^4 = f^2$ donne $f^2 = \text{Id}$ ce qui fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples et permet de conclure.

Si 1 et -1 ne sont pas les seules valeurs propres c'est que 0 est aussi valeur propre car les valeurs propres figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur. f présente alors 3 = dim E valeurs propres distincts donc f est diagonalisable.

Exercice 179 : [énoncé]

$X(X - j)(X - j^2)$ annule A donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et puisque $A \in M_n(\mathbb{R})$, j et j^2 ont même multiplicité en tant que valeur propre de A . Puisque le rang de A est la somme de ces deux multiplicités, il est pair.

Exercice 180 : [énoncé]

Soit M solution, M est diagonalisable sur \mathbb{C} avec pour valeurs propres j et j^2 . Puisque $\text{tr}M$ est réel, les valeurs propres j et j^2 ont même multiplicité. Par suite n est pair, $n = 2p$.

Nous allons montrer, en raisonnant par récurrence sur p qu'il existe une matrice

orthogonale P tel que $PMP^{-1} = \begin{pmatrix} J & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J \end{pmatrix}$ avec

$$J = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = R_{-2\pi/3}.$$

Pour $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ${}^tMM = M{}^tM \Leftrightarrow \begin{cases} ab + cd = ac + db \\ b^2 = c^2 \end{cases}$.

Si $b = c$ alors M est symétrique donc diagonalisable sur \mathbb{R} ce qui n'est pas le cas. Il reste $b = -c$ et donc $a = d$.

Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et la relation $M^2 + M + I = 0$ donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} a = -1/2 \\ b = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases} \text{ ce qui permet de conclure (car le cas } b = 0 \text{ est à exclure).}$$

Supposons la propriété établie au rang $n = 2p$ et étudions le rang $n = 2p + 2$.

Soit M une matrice solution.

La matrice $S = {}^tM + M$ est symétrique et donc il existe $X \neq 0$ tel que $SX = \lambda X$. On observe alors que l'espace $F = \text{Vect}(X, MX)$ est stable par M et par tM . Par suite F^\perp est aussi stable par M et tM . On peut alors appliquer l'étude menée pour $n = 2$ à l'action de M sur F et l'hypothèse de récurrence à celle sur F^\perp .

Cela établit la récurrence. Il ne reste plus qu'à souligner que les matrices ainsi obtenues sont bien solutions.

Exercice 181 : [énoncé]

$$\varphi^2(M) = P(PM + MP) + (PM + MP)P = PM + 2PMP + MP \text{ car } P^2 = P.$$

$$\varphi^3(M) = PM + 6PMP + MP.$$

$$\text{Par suite } \varphi^3(M) - 3\varphi^2(M) = -2PM - 2MP = -2\varphi(M).$$

Ainsi φ annule le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2)$.

Puisque ce polynôme est scindé simple, l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Exercice 182 : [énoncé]

a) Puisque $u^3 = u$, par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que u est diagonalisable de valeurs propres possibles 0, 1, -1 . Par les égalités $\text{tr}u = 0$ et $\text{tr}u^2 = 2n$ on peut affirmer qu'il existe une base de \mathbb{R}^{2n+1} dans laquelle

la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices commutant avec A étant celle de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec

$M, N \in M_n(\mathbb{R})$, on peut affirmer $\dim C(u) = 2n^2$.

b) $\Pi_u = X^3 - X$ donc $\dim \mathbb{R}[u] = 3$ et par suite $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si, et seulement si, $n = 1$.

Exercice 183 : [énoncé]

a) Si $A^2 = A$ alors $f_A^2 = f_A$. f_A est une projection donc diagonalisable.

b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe $P(f_A) : M \mapsto P(A)M$ de sorte que $P(f_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$.

Tout endomorphisme étant diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple, on peut conclure.

Exercice 184 : [énoncé]

a) oui.

b) Si A est inversible alors $M \mapsto A^{-1}M$ est clairement application réciproque de f .

Si f est inversible alors posons $B = f^{-1}(I_n)$. On a $AB = I_n$ donc A est inversible.

c) On observe que $f^n(M) = A^n M$ donc pour $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(f)(M) = P(A)M$$

Par suite P est annulateur de f si, et seulement si, il est annulateur de A . Puisque la diagonalisabilité équivaut à l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, on peut conclure.

Exercice 185 : [énoncé]

La matrice A est diagonalisable car A annule un polynôme scindé simple.

Les racines complexes du polynôme caractéristique χ_A de A sont conjuguées et valeurs propres de A donc racines du polynôme annulateur $X^n - 1$.

Si les deux racines de χ_A sont réelles alors $\text{Sp}A \subset \{-1, 1\}$ et A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc $A^{12} = I_2$.

Si les racines de χ_A sont complexes conjuguées z, \bar{z} . Leur somme sera $2\text{Re}(z) \in [-2, 2]$, leur produit $z\bar{z} = |z|^2 = 1$. La matrice A étant de plus à coefficients entiers, $2\text{Re}(z) \in \mathbb{Z}$. Les polynômes caractéristiques de A possibles sont alors $X^2 - 2X + 1$, $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$, $X^2 + X + 1$ et $X^2 + 2X + 1$.

Dans chaque cas le polynôme $X^{12} - 1$ est multiple du polynôme caractéristique et donc annulateur.

Exercice 186 : [énoncé]

Si $A \in E_n$ alors A est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines de l'unité. Ces valeurs propres sont aussi racines du polynôme caractéristique de A .

Or les coefficients de ce polynôme sont entiers et, par les expressions des coefficients d'un polynôme scindé en fonction de ses racines complexes (ici de module 1), on peut borner les coefficients du polynôme caractéristique de A . Par suite, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles pour un élément $A \in E_n$. Ces polynômes ont eux-mêmes qu'un nombre fini de racines et il n'y a donc qu'un nombre fini de racines de l'unité possibles pour les valeurs propres de $A \in E_n$.

On peut alors affirmer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que toutes les valeurs propres λ des matrices $A \in E_n$ vérifient $\lambda^N = 1$. On a alors aussi $A^N = 1$ (car A est diagonalisable) et donc $\omega(A) \leq N$. Ainsi $\omega(E_n) \subset \llbracket 1, N \rrbracket$.

Exercice 187 : [énoncé]

a) Par récurrence

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

puis on étend par linéarité.

b) Si M est diagonalisable alors M annule un polynôme scindé simple P et les calculs précédents montrent que A annule aussi ce polynôme. Par suite A est diagonalisable. De plus A annule aussi le polynôme XP' de sorte que si λ est valeur propre de A alors λ est racine commune de P et de XP' . Or P n'a que des racines simples donc P et P' n'ont pas de racines communes d'où $\lambda = 0$. A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{0\}$ donne $A = 0$.

Ainsi M est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

Exercice 188 : [énoncé]

a) Par récurrence et en exploitant $AB = BA$

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

puis on étend par linéarité.

b) Si M est diagonalisable alors M annule un polynôme scindé simple P et les calculs précédents montrent que A annule aussi ce polynôme. Par suite A est diagonalisable semblable à une matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A qui sont racines de P .

De plus, on a

$$P'(A)B = O_n$$

et la matrice $P'(A)$ est semblable à

$$P'(D) = \begin{pmatrix} P'(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P'(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Puisque les racines de P sont simples et que les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont racines de P , on a $P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n) \neq 0$. On en déduit que la matrice $P'(A)$ est inversible et l'identité $P'(A)B = O_n$ donne alors $B = O_n$.

Ainsi, si M est diagonalisable, A est diagonalisable et B est nulle. La réciproque est immédiate.

Exercice 189 : [\[énoncé\]](#)

Notons M la matrice étudiée et supposons celle-ci diagonalisable.

Il existe un polynôme P scindé simple annulant M . Puisque

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & \star \\ O & P(A) \end{pmatrix} = O_{2n}$$

le polynôme P annule aussi la matrice A qui est donc nécessairement diagonalisable.

De plus, puisque $\chi_M = \chi_A^2$, les matrices A et M ont les mêmes valeurs propres et on a l'égalité suivante sur leurs multiplicités :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A, m_\lambda(M) = 2m_\lambda(A)$$

ce qui entraîne l'égalité suivante sur la dimension des sous-espaces propres

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A, \dim E_\lambda(M) = 2 \dim E_\lambda(A)$$

et enfin l'égalité de rang suivante

$$\forall \lambda \in \text{Sp}A, \text{rg}(M - \lambda I_{2n}) = 2\text{rg}(A - \lambda I_n)$$

Or

$$\text{rg}(M - \lambda I_{2n}) = \text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ O & A - \lambda I_n \end{pmatrix}$$

La matrice A étant diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres distinctes de A et $\alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(A)$.

En considérant la matrice inversible $Q = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}$, on a

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} D & C \\ O & D \end{pmatrix} \text{ avec } C = P^{-1}BP.$$

On écrit la matrice C par blocs selon la même décomposition que A :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m,1} & \cdots & C_{m,m} \end{pmatrix} \text{ avec } C_{i,j} \in \text{Mat}_{\alpha_i, \alpha_j}(\mathbb{K})$$

et la condition

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A - \lambda_k I_n & B \\ O & A_k - \lambda_k I_n \end{pmatrix} = 2\text{rg}(A - \lambda_k I_n)$$

se relit après formule de passage $C_{k,k} = O_{\alpha_k}$.

Inversement, si la matrice A est diagonalisable et s'il y a nullité des blocs diagonaux d'une représentation de B dans une base adaptée à la décomposition de \mathbb{K}^n en somme de sous-espaces propres de A alors on peut reprendre dans l'autre sens l'étude qui précède pour affirmer que M est diagonalisable.

Exercice 190 : [\[énoncé\]](#)

Soit M solution.

Puisque le corps de base est \mathbb{C} , la matrice M est semblable à une matrice triangulaire supérieure où figure sur la diagonale les valeurs propres de M comptées avec multiplicité.

Puisque $\text{tr}(M) = n$, la somme des valeurs propres de M comptées avec multiplicité vaut n .

Or les valeurs propres de M sont racines du polynôme $X^5 - X^2 = X^2(X^3 - 1)$, elle ne peuvent donc qu'être $0, 1, j$ ou j^2 . Notons p, q, r et s les multiplicités de chacune ; on a $\text{tr}M = q + rj + sj^2 = n$. Puisque les parties réelles de j et j^2 valent $-1/2$, la seule possibilité est que $q = n, r = s = 0$ et alors $p = 0$.

En particulier 0 n'est pas valeur propre de M et donc M est inversible.

La relation $M^5 = M^2$ donne alors $M^3 = I_n$ et donc M est diagonalisable puisque M annule un polynôme scindé simple. Finalement M est semblable à I_n donc égale I_n car sa seule valeur propre est 1 .

Inversement, la matrice I_n est solution.

Exercice 191 : [\[énoncé\]](#)

Par élimination de u , on a $f^2 - \alpha f = \beta(\beta - \alpha)v$ et $f^3 - \alpha f^2 = \beta^2(\beta - \alpha)v$.

Par élimination de v , on obtient $f \circ (f - \alpha \text{Id}) \circ (f - \beta \text{Id}) = \tilde{0}$.

Ainsi $P = X(X - \alpha)(X - \beta)$ est annulateur de f .

Cas $\alpha \neq \beta$ et $\alpha, \beta \neq 0$

f est diagonalisable car annule un polynôme scindé simple.

Cas $\alpha = \beta = 0$

f est diagonalisable car f est l'endomorphisme nul.

Cas $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$.

On a $f^2 - \alpha f = 0$ donc f est diagonalisable car annule le polynôme scindé simple $X(X - \alpha)$.

Cas $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$.

Semblable.

Cas $\alpha = \beta \neq 0$.

On a $f = \alpha(u + v)$ et $f^2 = \alpha^2(u + v)$ donc à nouveau $f^2 - \alpha f = 0$.

Dans tous les cas, l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 192 : [énoncé]

On remarque

$$C^3 - C^2 = 3A + 3B = 3C$$

La matrice C annule donc le polynôme

$$X^3 - X^2 - 3X$$

On vérifie aisément que ce polynôme est scindé à racines simples et on peut donc affirmer que C est diagonalisable.

Or

$$A = C^3 - 2C^2 \text{ et } B = C + 2C^2 - C^3$$

donc A et B sont diagonalisables.

Exercice 193 : [énoncé]

a) (\Leftarrow) Immédiat

(\Rightarrow) Par récurrence sur $n \geq 2$.

Cas $n = 2$

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

En posant $u = z_2/z_1$, on a alors (car $z_1 \neq 0$)

$$|1 + u| = 1 + |u|$$

En écrivant $u = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et en élevant au carré l'identité précédente, on obtient

$$(1 + a)^2 + b^2 = 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

et cette identité est vérifiée si, et seulement si, $a \in \mathbb{R}^+$ et $b = 0$ ce qui permet d'écrire $z_2 = \alpha_2 z_1$ avec $\alpha_2 = a \in \mathbb{R}^+$.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$.

Soient $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ avec $z_1 \neq 0$ tels que

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et puisque les termes extrémaux sont égaux on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

donc par hypothèse de récurrence on peut écrire pour tout $k \geq 2$

$$z_k = \alpha_k z_1 \text{ avec } \alpha_k \geq 0$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^n z_k = (1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) z_1 \neq 0$$

et puisque

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}|$$

l'étude du cas $n = 2$ permet d'écrire

$$z_{n+1} = a \sum_{k=1}^n z_k = \alpha_{n+1} z_1 \text{ avec } \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}^+$$

Récurrence établie.

b) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $M^n = I_n$ et $\text{tr}M = n$ alors cette matrice est diagonalisable (car annule le polynôme scindé simple $X^n - 1$) et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$$

Or les valeurs propres vérifient aussi

$$\forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k^n = 1$$

et elles sont donc de module 1. Nous sommes donc dans la situation où

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

Puisque $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $\lambda_k = \alpha_k \lambda_1$ pour tout $k \geq 2$ avec $\alpha_k \geq 0$. Or tous les λ_k sont de module 1 donc les α_k sont égaux à 1 et par suite

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n$$

Enfin puisque la somme des valeurs propres vaut n , on peut conclure

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$$

et finalement $M = I_n$ car la matrice M est semblable à I_n . La réciproque est immédiate.

Exercice 194 : [énoncé]

f annule un polynôme scindé à racines simple et $f|_F$ aussi.

Exercice 195 : [énoncé]

Si F admet une base de vecteurs propres, il est immédiat d'établir qu'il est stable par u .

Inversement, si F est stable alors u_F est diagonalisable et donc il existe une base de F formée de vecteurs propres de u .

Exercice 196 : [énoncé]

Le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par u et l'endomorphisme

induit par u sur F a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2) .

Or cette matrice n'est pas diagonalisable donc l'endomorphisme induit par u sur F n'est pas diagonalisable et donc u ne l'est pas non plus.

Exercice 197 : [énoncé]

$\text{Sp}f = \{2, 4, 6\}$, $E_2(A) = \text{Vect}e_1$, $E_4(A) = \text{Vect}e_2$ et $E_6(A) = \text{Vect}e_3$ avec $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$.

Si V est un sous-espace vectoriel stable alors f_V est diagonalisable et donc possède une base de vecteurs propres de f . Ainsi $V = \{0\}$, $\text{Vect}(e_i)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$, $\text{Vect}(e_j, e_k)$ avec $j \neq k \in \{1, 2, 3\}$ ou $V = \mathbb{R}^3$.

Exercice 198 : [énoncé]

Si f et g sont simultanément diagonalisables alors on peut former une base de chaque sous-espace propre de f à l'aide de vecteur propre de g . Par suite les sous-espaces propres de f sont stables par g et inversement.

Supposons que les sous-espaces propres de f soient stables par g . f étant diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de f . Sur chaque sous-espace propre de f , la restriction de g définit un endomorphisme diagonalisable car annulé par un polynôme scindé à racines simples (car g diagonalisable). Cela permet de construire une base de diagonalisation simultanée.

Exercice 199 : [énoncé]

Si f et g sont simultanément diagonalisable alors leurs représentations diagonales commutent donc f et g commutent.

Si f et g commutent alors g laisse stable chaque sous-espace propre $E_\lambda(f)$ et donc la restriction de g à celui-ci est diagonalisable dans une certaine base \mathcal{B}_λ . En accolant les bases \mathcal{B}_λ , pour $\lambda \in \text{Sp}(f)$ on obtient une base où f et g sont représentés par des matrices diagonales.

Exercice 200 : [énoncé]

a) Une base de vecteur propre de u est aussi une base de vecteur propre de $P(u)$.

b) La réciproque n'est pas vraie en toute généralité comme le montre le cas d'un polynôme constant.

En revanche, on peut montrer que la réciproque est vraie si $\deg P = 1$.

Exercice 201 : [énoncé]

a) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un endomorphisme représenté par A n'est pas diagonalisable alors que son carré est nul.

b) Dans une base de vecteurs propres de f , f est représenté par une matrice diagonale D et f^2 par la matrice D^2 . Cela permet de déterminer $\ker f^2$ et de conclure $\ker f^2 = \ker f$.

c) Supposons $\ker f = \ker f^2$. Soit P le polynôme minimal de f^2 .

Si 0 n'est pas racine de P alors, sachant f^2 diagonalisable, on peut écrire

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \neq 0.$$

Pour chaque λ_i , posons δ_i et $-\delta_i$ les deux solutions complexes de l'équation $z^2 = \lambda_i$.

Considérons ensuite $Q = \prod_{i=1}^p (X - \delta_i)(X + \delta_i)$ de sorte que $Q(f) = P(f^2) = 0$.

Puisque f annule un polynôme scindé à racines simples, f est diagonalisable.

Si 0 est racine de P alors on peut écrire $P = X \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ avec $\lambda_i \neq 0$. En

reprenant les notations ci-dessus, et on considérant le polynôme

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - \delta_i)(X + \delta_i), \text{ on a } f^2 Q(f) = P(f^2) = 0. \text{ Ainsi } \text{Im} Q(f) \subset \ker f^2, \text{ or}$$

$\ker f^2 = \ker f$ donc $f Q(f) = 0$. Ainsi f annule un polynôme scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

Exercice 202 : [énoncé]

a) u est diagonalisable si, et seulement si, u annule un polynôme scindé à racines simples.

ou encore :

u est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

b) Si u est diagonalisable, il est clair que u^2 l'est aussi.

Inversement, si u^2 est diagonalisable alors son polynôme annulateur est scindé à racines simples : $(X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$.

Puisque $u \in \text{GL}(E) : \forall 1 \leq i \leq p, \lambda_i \neq 0$ car 0 n'est pas valeur propre de u .

Notons α_i et β_i les deux solutions de l'équation $z^2 = \lambda_i$.

Puisque $(u^2 - \lambda_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u^2 - \lambda_p \text{Id}) = 0$ on a

$$(u - \alpha_1 \text{Id}) \circ (u - \beta_1 \text{Id}) \circ \dots \circ (u - \alpha_p \text{Id}) \circ (u - \beta_p \text{Id}) = 0.$$

Ainsi u annule un polynôme scindé à racines simples. Par suite u est diagonalisable.

c) Si u est diagonalisable alors $P(u)$ l'est aussi.

Inversement, si $P(u)$ est diagonalisable alors son polynôme minimal est scindé à racines simples $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ où les λ_i sont les valeurs propres de $P(u)$.

Le polynôme $(P(X) - \lambda_1) \dots (P(X) - \lambda_p)$ est alors annulateur de u .

Les facteurs $P(X) - \lambda_i$ sont sans racines communes.

Le polynôme minimal M de u divise $(P(X) - \lambda_1) \dots (P(X) - \lambda_p)$.

Si ω est racine au moins double de M alors ω est racine au moins double de l'un des facteurs $P(X) - \lambda_i$ donc racine de P' .

Or ω est aussi valeur propre de u donc $P'(\omega) = 0$ est valeur propre de $P'(u)$.

Cependant $P'(u) \in \text{GL}(E)$, c'est donc impossible.

Par suite les racines de M sont simples et u est donc diagonalisable.

Exercice 203 : [énoncé]

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $P(u)$.

Posons $Q = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. Q est un polynôme annulateur de $P(u)$ donc

$$\prod_{k=1}^n (P(u) - \lambda_k \text{Id}_E) = \tilde{0}.$$

Posons $Q_k = P - \lambda_k$. Le polynôme $\prod_{k=1}^n Q_k$ est annulateur de u et les racines d'un

polynôme Q_k sont distinctes de celles d'un polynôme Q_ℓ avec $k \neq \ell$ car $\lambda_k \neq \lambda_\ell$.

De plus si α est racine multiple de Q_k alors $P(\alpha) = \lambda_k$ et $Q'_k(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ ce qui est exclu par hypothèse.

Par conséquent le polynôme $\prod_{k=1}^n Q_k$ est scindé simple donc u est diagonalisable.

Exercice 204 : [énoncé]

$\dim \ker A = n - 2$ donc 0 est valeur propre de A de multiplicité au moins $n - 2$.

Puisque χ_A est scindé, la trace de A est la somme des valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

Si 0 est la seule valeur propre de A alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et alors $A^n = O_n$ ce qui est exclu.

Sinon A possède alors une autre valeur propre, puis deux car la somme des valeurs propres est nulle. Par suite la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est au moins n et donc A est diagonalisable.

Exercice 205 : [énoncé]

a) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T .

b) On peut écrire $A = PTP^{-1}$ donc

$$\det(A + I_n) = \det(T + I_n) = 1$$

c) $\det(A + M) = \det(M) \det(AM^{-1} + I_n)$.

Puisque $(AM^{-1})^n = A^n M^{-n} = O_n$, 0 est la seule valeur propre de AM^{-1} et par l'étude qui précède $\det(A + M) = \det M$.

d) Si A est solution alors pour tout $\lambda \neq 0$, $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ donc 0 est seule valeur propre de A .

Exercice 206 : [énoncé]

Si A est solution alors $P = X(X - 2)^2$ est annulateur de A et les valeurs propres de A figurent parmi $\{0, 2\}$. Par la trace, on peut alors affirmer que 2 est valeur propre de multiplicité 4.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\ker(A - 2\text{Id})^2$ et $\ker A$ sont supplémentaires.

Par multiplicité des valeurs propres, leurs dimensions respectives sont 4 et $n - 4$.

Ainsi A est semblable à $\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0 \\ 0 & O_{n-4} \end{pmatrix}$ avec $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = 0$.

On raisonnant sur le rang, on montre que M est semblable à O_4 ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réciproque est immédiate.

Exercice 207 : [énoncé]

Si A est nilpotente alors seule 0 est valeur propre de A et donc A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \star \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix}. \text{ Par suite } \text{tr} A^p = 0 \text{ pour tout } p \geq 1.$$

Inversement, supposons $\text{tr}A^p = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les racines non nulles de χ_f et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs multiplicités respectives.

On a $\forall 1 \leq p \leq m \leq n, \text{tr}(f^p) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i^p = 0$.

Ce système de Vandermonde implique : $\forall 1 \leq i \leq m, \alpha_i = 0$ et donc l'inexistence de valeurs propres autres que 0 ce qui permet de conclure que A est nilpotente via trigonalisation.

Exercice 208 : [\[énoncé\]](#)

Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X - 2)^2$$

est annulateur de M .

On en déduit $\text{Sp}M \subset \{0, 2\}$ et M trigonalisable (car M annule un polynôme scindé).

Par suite $\text{tr}M$ est la somme des valeurs propres de M comptées avec multiplicité et puisque $\text{tr}M = 0$, seul 0 est valeur propre de M .

On en déduit que la matrice $M - 2I_n$ est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n$$

Exercice 209 : [\[énoncé\]](#)

Puisque le polynôme $X^3 - X^2 = X^2(X - 1)$ annule f le lemme de décomposition des noyaux donne

$$\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - \text{Id})$$

Sachant $\dim \ker(f - \text{Id}) = 1$, on a $\dim \ker f^2 = 2$.

On ne peut avoir $\dim \ker f = 0$ et puisque $\ker f \subset \ker f^2$, on a

$$\dim \ker f = 1 \text{ ou } 2$$

Si $\dim \ker f = 2$ alors

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f - \text{Id}) \oplus \ker f$$

et dans une base adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\dim \ker f = 1$ alors considérons $e_3 \in \ker f^2 \setminus \ker f$ et $e_2 = f(e_3)$.

On vérifie aisément que (e_2, e_3) est une base de $\ker f^2$ et en considérant un vecteur $e_1 \in \ker(f - \text{Id})$ non nul, on obtient une base (e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 210 : [\[énoncé\]](#)

a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est triangularisable et lors de cette triangularisation les valeurs propres de A apparaissent sur la diagonale. Or A est nilpotent donc 0 est sa seule valeur propre et la diagonale de la matrice triangulaire obtenue est nulle. Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est alors égal à $(-1)^n X^n$.

b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a aussi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le polynôme caractéristique est calculé par la même formule dans les deux cas. Par suite le polynôme caractéristique pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est scindé et donc à nouveau A est triangularisable avec des 0 sur la diagonale.

Exercice 211 : [\[énoncé\]](#)

Si u possède une unique valeur propre λ alors celle-ci est la seule racine de son polynôme caractéristique qui est alors $(\lambda - X)^{\dim E}$. Ce dernier annulant u , on peut affirmer $u - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotent.

Si $u - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotent alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \lambda)^p$ soit annulateur de u . Les valeurs propres de u étant racine de ce polynôme, elles ne peuvent qu'être égales à λ . De plus λ est assurément valeur propre car un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie possède au moins une valeur propre.

Exercice 212 : [\[énoncé\]](#)

a) Par récurrence

$$f^n \circ g - g \circ f^n = n f^n$$

b) Par linéarité

$$P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P'(f)$$

Par suite, si $P(f) = 0$, alors $f \circ P'(f) = 0$.

c) Soit π le polynôme minimal de l'endomorphisme f . π annule f donc $X\pi'$ aussi. Par minimalité de π , $\pi \mid X\pi'$. Pour des raisons de degré et de coefficients dominants, $\alpha\pi = X\pi'$ avec $\alpha = \deg \pi$. On en déduit $\pi = X^\alpha$ et donc f est nilpotent.

Exercice 213 : [énoncé]

a) Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.
 X^p est annulateur de f donc $\text{Sp}(f) \subset \{0\}$. Or $\text{Sp}(f) \neq \emptyset$ donc $\text{Sp}(f) = \{0\}$.
 Inversement, si $\text{Sp}(f) = \{0\}$ alors seule 0 est racine de son polynôme caractéristique. Or χ_f est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc $\chi_f = (-1)^n X^n$ puis $f^n = 0$ en vertu du théorème de Cayley Hamilton. On en déduit que f est nilpotente.
 b) Supposons f nilpotent.
 Par l'étude ci-dessus, f est trigonalisable stricte et donc

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{tr}(f^k) = 0$$

car les puissances de f pourront aussi être représentées par des matrices triangulaires strictes.
 Inversement, supposons

$$\forall 1 \leq k \leq n, \text{tr}(f^k) = 0$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres comptées avec multiplicité de A , on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système est délicate.
 En raisonnant par récurrence, nous allons établir que la seule solution est $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ce qui permettra de conclure que f est nilpotente car $\chi_f = (-1)^n X^n$ est annulateur de f .
 Pour $n = 1$: la propriété est immédiate.
 Supposons la propriété au rang $n - 1$.
 Considérons le polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$$

En développant,

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

Comme $P(\lambda_i) = 0$, on a $\sum_{i=1}^n P(\lambda_i) = 0$.

Or

$$\sum_{i=1}^n P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n + a_{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{n-1} + \dots + a_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i + na_0 = na_0$$

On en déduit $a_0 = 0$ et donc 0 est racine de P .

Il existe alors $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i = 0$.
 Par symétrie du problème, on peut supposer $\lambda_n = 0$.
 Par application de l'hypothèse de récurrence, on obtient $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
 La récurrence est établie.

Exercice 214 : [énoncé]

a) Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme T .
 Il existe une matrice M non nulle vérifiant $T(M) = \lambda M$.
 On a alors $MA = (A + \lambda I_n)M$.
 Par une récurrence facile, $MA^p = (A + \lambda I_n)^p M$.
 Or pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = O_n$ donc $(A + \lambda I_n)^p M = O_n$.
 Cependant la matrice M n'est pas nulle donc la matrice $(A + \lambda I_n)^p$ n'est pas inversible puis la matrice $A + \lambda I_n$ ne l'est pas non plus. Ainsi λ est valeur propre de A et donc $\lambda = 0$ car 0 est la seule valeur propre d'une matrice nilpotente.
 On en déduit $\text{Sp}T \subset \{0\}$ puis $\text{Sp}T = \{0\}$ car le corps de base \mathbb{C} assure l'existence d'au moins une valeur propre.
 Le polynôme caractéristique de T étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et de degré n^2 , on a $\chi_T = (-1)^{n^2} X^{n^2}$ puis $T^{n^2} = \tilde{0}$ car le polynôme caractéristique est annulateur en vertu du théorème de Cayley Hamilton.
 Finalement, l'endomorphisme T est nilpotent.
 b) Pour $g = \text{Id}_E$ on a $T = \tilde{0}$.
 Ainsi l'endomorphisme T est nilpotent alors que g ne l'est pas.
 La réciproque est fausse.

Exercice 215 : [énoncé]

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente vérifie $M^n = O_n$. Considérons la matrice $(A + xB)^n$. Les coefficients de cette matrice sont des polynômes de degrés inférieurs à n s'annulant chacun en les $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$, ce sont donc des polynômes nuls. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $(A + xB)^n = O_n$. En particulier pour $x = 0$, on obtient $A^n = O_n$. Aussi pour tout $y \neq 0$, en considérant $y = 1/x$, on a $(yA + B)^n = O_n$ et en faisant $y \rightarrow 0$, on obtient $B^n = O_n$.

Exercice 216 : [énoncé]

a) \mathcal{I}_1 est l'idéal des polynômes annulateurs de u ; il est engendré par $P_1 = \pi_u$ polynôme minimal de u .
 La somme de deux endomorphismes nilpotents commutant est encore nilpotent car la formule du binôme de Newton s'applique et il suffit de travailler avec un exposant assez grand. On obtient alors facilement que \mathcal{I}_2 est un sous-groupe de

$(\mathbb{K}[X], +)$. La stabilité par absorption étant immédiate, \mathcal{I}_2 est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et comme il contient \mathcal{I}_1 , il est non nul.

b) Puisque $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$, $P_1 \in P_2\mathbb{K}[X]$ et donc $P_2 \mid P_1$.

Aussi, en posant n la dimension de E , on sait que pour tout endomorphisme nilpotent de v de E , on a $v^n = \tilde{0}$. Puisque $P_2(u)$ est nilpotent, on en déduit que $(P_2)^n(u) = \tilde{0}$ et donc $P_1 \mid P_2^n$.

c) Cette question est immédiate avec la décomposition de Dunford mais cette dernière est hors-programme... Procédons autrement!

Puisque $P_2 \mid P_1$ et $P_1 \mid P_2^n$, les racines de P_2 sont exactement celles de P_1 c'est-à-dire les valeurs propres de l'endomorphisme u . On peut donc écrire

$$P_2 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

Or $P_2(u)$ étant nilpotent, il est immédiat que l'endomorphisme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (u - \lambda \text{Id}_E)$

l'est aussi.

On en déduit que

$$P_2 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)$$

et ce polynôme est donc scindé simple.

Déterminons maintenant un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour $Q = P_2R$, on ait $P_2(u - Q(u)) = \tilde{0}$.

On en déduira que $u - Q(u)$ est diagonalisable avec $Q(u) \in \mathcal{I}_2$.

L'identité $P_2(u - Q(u)) = \tilde{0}$ est obtenue dès que P_1 divise le polynôme

$$P_2(X - P_2(X)R(X)) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda - P_2(X)R(X))$$

Or $P_1 = \prod_{\lambda \in \text{Sp}u} (X - \lambda)^{\beta_\lambda}$ donc il suffit que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}u$, le facteur

$(X - \lambda)^{\beta_\lambda}$ divise le facteur $X - \lambda - P_2(X)R(X)$ pour pouvoir conclure.

On a

$$X - \lambda - P_2(X)R(X) = (X - \lambda) \left(1 - \prod_{\mu \neq \lambda} (X - \mu)R(X) \right)$$

La condition voulue est assurément vérifiée si $\beta_\lambda = 1$.

Pour $\beta_\lambda \geq 2$, la condition voulue est satisfaite si $\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu)R(\lambda) = 1$ et si pour

tout $k \in \{1, \dots, \beta_\lambda - 2\}$, la dérivée k ème du polynôme $\prod_{\mu \neq \lambda} (X - \mu)R(X)$ s'annule

en λ . Cela fournit des équations déterminant pleinement

$R(\lambda), R'(\lambda), \dots, R^{\beta_\lambda - 2}(\lambda)$ car $\prod_{\mu \neq \lambda} (\lambda - \mu) \neq 0$.

Sachant qu'il est possible de construire un polynôme prenant des valeurs données ainsi que ses dérivées en des éléments deux à deux distincts de \mathbb{K} , on peut déterminer un polynôme résolvant notre problème.

Exercice 217 : [énoncé]

a) $O_2^2 = O_2$ donc $\Phi(O_2)^2 = \Phi(O_2)$ d'où $\Phi(O_2) = 0$ ou 1 .

Si $\Phi(O_2) = 1$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\Phi(A) = \Phi(A) \times \Phi(O_2) = \Phi(A \times O_2) = 1.$$

Ceci est exclu car la fonction Φ n'est pas constante. On en déduit $\Phi(O_2) = 0$.

b) Si A est nilpotente alors $A^2 = O_2$ (car A est de taille 2) et donc $\Phi(A)^2 = 0$ puis $\Phi(A) = 0$.

c) $I_2^2 = I_2$ donc $\Phi(I_2)^2 = \Phi(I_2)$ puis $\Phi(I_2) = 0$ ou 1 .

Si $\Phi(I_2) = 0$ alors pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = \Phi(A \times I_2) = \Phi(A) \times 0 = 0$.

Ceci est exclu car la fonction Φ n'est pas constante. On en déduit $\Phi(I_2) = 1$.

Notons $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque $E^2 = I_2$ donc $\Phi(E)^2 = 1$ puis $\Phi(E) = -1$ car $\Phi(E) \neq \Phi(I_2)$.

Puisque $B = EA$, on en déduit $\Phi(B) = -\Phi(A)$.

d) Si A est inversible alors $\Phi(I_2) = \Phi(A) \times \Phi(A^{-1})$ et donc $\Phi(A) \neq 0$ puisque $\Phi(I_2) = 1 \neq 0$.

Inversement, supposons A non inversible. 0 est valeur propre de A .

On vérifie aisément que deux matrices A et B semblables vérifient $\Phi(A) = \Phi(B)$.

Si A est diagonalisable alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}A \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\Phi(A) = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{tr}A \end{pmatrix} = -\Phi \begin{pmatrix} 0 & \text{tr}A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

car cette dernière matrice est nilpotente.

Si A n'est pas diagonalisable A est trigonalisable (car χ_A scindé sur \mathbb{R}) et A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite $\Phi(A) = 0$ car cette dernière matrice est nilpotente.

Exercice 218 : [énoncé]

1. $\mathbb{K}[A] = \text{Vect} \{A^k / k \in \mathbb{N}\}$.

En notant p l'indice de nilpotence de A , $\mathbb{K}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$.

D'autre part, on établit facilement que la famille (I_n, A, \dots, A^{p-1}) est libre et donc on peut conclure $\dim \mathbb{K}[A] = p$.

2.a) $B^p = A^p P(A)^p = 0$ donc B est nilpotente et $\text{Ind}(B) \leq \text{Ind}(A)$.

Si $B^q = 0$ alors $A^q P(A)^q = 0$ et donc le polynôme $X^q P(X)^q$ est annulateur de A . Or le polynôme minimal de A est X^p et celui-ci divise tout polynôme annulateur de A donc X^p divise $X^q P(X)^q$. Sachant $P(0) \neq 0$, on obtient que X^p divise X^q et donc $p \leq q$.

2.b) Puisque B est un polynôme en A , on a $\mathbb{K}[B] \subset \mathbb{K}[A]$. Or par égalité des indices de nilpotence, on a égalité des dimensions et donc $\mathbb{K}[B] = \mathbb{K}[A]$. Par suite il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = R(B)$.

Puisque $A^p = 0$, le polynôme $R(X)^p$ est annulateur de B , or le polynôme minimal de B est X^p donc X^p divise $R(X)^p$ et on en déduit $R(0) = 0$. Cela permet d'écrire $R(X) = XQ(X)$ et donc $A = BQ(B)$.

Si $Q(0) = 0$, alors on peut encore écrire $A = B^2 S(B)$ et alors l'indice de nilpotence de A est inférieur au plus petit entier supérieur à $p/2$. Si $p > 1$, c'est absurde et donc on peut affirmer $Q(0) \neq 0$.

Dans le cas $p = 1$, on a $A = 0$, $B = 0$ et la résolution est immédiate.

3.a) On définit la matrice étudiée

```
A:=matrix(8,8,(i,j)->if i=j-1 or i=j-4 then 1 else 0 fi);
```

Cette matrice est triangulaire supérieure, donc nilpotente.

On évalue les puissances successives de la matrice A

```
seq(evalm(A^k),k=1..8);
```

On observe alors $\text{Ind}(A) = 8$.

3.b) On définit la matrice B

```
B:=evalm(A*(1+A+2*A^2+3*A^3));
```

On cherche ensuite le polynôme Q à coefficients inconnus. On définit celui-ci

```
Q:=unapply(add(a[k]*X^k,k=0..6),X);
```

ainsi que la matrice $C = BQ(B)$

```
C:=evalm(B&*Q(B));
```

En jouant avec le facteur de zoom, on observe la structure de cette matrice et celle-ci correspond à A si, et seulement si, les a_k sont solutions d'un système facile à former. On résout celui-ci

```
solve({C[1,2]=1,C[1,3]=0,C[1,4]=1,seq(C[1,k]=0,k=5..8)});
```

On peut vérifier l'exactitude de cette solution

```
assign(%);
evalm(B&*Q(B));
```

Finalement, on obtient le polynôme

$$Q(X) = 1 - X + X^2 - 2X^3 + 9X^4 - 32X^5 + 72X^6$$

Exercice 219 : [énoncé]

a) $\text{Sp}A = \{0\}$ et $A \neq O_n$ donc A n'est pas diagonalisable.

b) On remarque $A^n = O_n$ et $A^{n-1} \neq O_n$.

S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$ alors $B^{2n} = A^n = O_n$ donc B est nilpotente. Par suite $B^n = O_n$.

Or $B^{2n-2} \neq O_n$ avec $2n-2 \geq n$, c'est absurde.

Exercice 220 : [énoncé]

On a

$$\det(A + N) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}N)$$

Puisque A et N commutent, il en est de même de A^{-1} et N . On en déduit que la matrice $A^{-1}N$ est nilpotente car N l'est.

La matrice $A^{-1}N$ est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et la matrice $I_n + A^{-1}N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

On en déduit

$$\det(I_n + A^{-1}N) = 1$$

puis

$$\det(A + N) = \det A$$

Exercice 221 : [\[énoncé\]](#)

a) Si λ est valeur propre de A alors $\lambda^p = 0$ d'où $\lambda = 0$. Par suite $\chi_A = (-1)^n X^n$ puis par Cayley Hamilton $A^n = 0$.

b) $\det(A + I) = \chi_A(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1$

c) Si M est inversible $\det(A + M) = \det(AM^{-1} + I) \det M$.

Or A et M^{-1} commutent donc $(AM^{-1})^p = 0$ puis par b) : $\det(A + M) = \det M$.

Si M n'est pas inversible. Posons $M_p = M + \frac{1}{p}I_n$. Quand $p \rightarrow +\infty$, M_p est inversible et commute avec A donc $\det(A + M_p) = \det M_p$. Or $\det M_p \rightarrow \det M$ et $\det(A + M_p) \rightarrow \det(A + M)$ donc on peut prolonger l'égalité à toute matrice qui commute avec A .

d) Non prendre : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 222 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (A + 2^k B)^n = O_n$$

Considérons alors la matrice

$$(A + XB)^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$

Celle-ci est à coefficients polynomiaux de degrés inférieurs à n . Puisque $1, 2, \dots, 2^n$ sont $n + 1$ racines distinctes de ces coefficients, ceux-ci sont tous nuls. On en déduit

$$A^n = O_n$$

car les coefficients constants sont nuls, et

$$B^n = O_n$$

car les coefficients des termes X^n sont nuls.

Exercice 223 : [\[énoncé\]](#)

a) Par le développement limite de $\sqrt{1+x}$ en 0 on peut écrire

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$$

avec P_n polynôme de degré inférieur à $n - 1$.

b) On a

$$P_n^2(x) = (\sqrt{1+x} + O(x^n))^2 = 1 + x + O(x^n)$$

donc

$$P_n^2(x) - x - 1 = O(x^n)$$

Notons α la multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme $P_n^2(X) - X - 1$. On peut écrire $P_n^2(X) - X - 1 = X^\alpha Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$ et donc

$$x^\alpha Q(x) = O(x^n) \text{ au voisinage de } 0$$

puis

$$x^{\alpha-n} Q(x) = O(1)$$

Nécessairement $\alpha - n \geq 0$ et on en déduit que 0 est racine de multiplicité au moins n du polynôme $P_n^2(X) - X - 1$ et donc que X^n divise ce polynôme.

c) Puisque X^n annule f , $P_n^2(X) - X - 1$ annule aussi f et alors l'endomorphisme $g = P_n^2(f)$ vérifie

$$g^2 = f + \text{Id}_E$$

d) Puisque E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, le polynôme caractéristique de f est scindé et puisque λ est sa seule valeur propre, celui-ci est

$$\chi_f = (-1)^n (X - \lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley-Hamilton, on a $(f - \lambda \text{Id}_E)^n = \tilde{0}$.

Considérons alors $\mu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mu^2 = \lambda$ et posons

$$g = \mu P_n((f - \lambda \text{Id}_E)/\mu^2)$$

Puisque $(f - \lambda \text{Id}_E)/\mu^2$ vérifie l'hypothèse du c), on a

$$g^2 = \mu^2 \left(\frac{f - \lambda \text{Id}_E}{\mu^2} + \text{Id}_E \right) = f$$